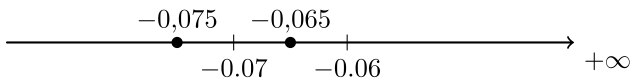
Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 8º ano
29 de fevereiro de 2012

Proposta de resolução

1. Localizando os quatro números das opções na reta real, temos:

Ignorando os números −0,75 e −0,65 (porque são claramente menores que −0,06), podemos representar os números −0,07 e −0,06, bem como as opções −0,075 e −0,065:



Desta forma verificamos que $-0{,}07 < -0{,}065 < -0{,}06$

Resposta: **Opção A**

2. Como k um número negativo, temos que

- k^2 é um número **positivo**, porque as potências de expoente par são sempre números positivos (ou zero)
- $k^3 = k^2 \times k$ é um número **negativo** porque resulta de um produto de um número positivo (k^2) por um número negativo (k)
- $-k$ é um número **positivo** porque o simétrico de um número negativo é um número positivo
- $-k^3$ é um número **positivo** porque k^3 é um número negativo e o seu simétrico é um número positivo

Resposta: **Opção B**

3. Como a sonda viaja 15 quilómetros em cada segundo, irá viajar

- 15×60 quilómetros em 60 segundos (1 minuto)
- $15 \times 60 \times 60$ quilómetros em 60 minutos (1 hora)

Assim, como $15 \times 60 \times 60 = 54\,000$, temos que

$$15 \text{ km/s} = 54\,000 \text{ km/h}$$

E escrevendo a resposta em notação científica, temos

$$54\,000 = 54 \times 1000 = 5{,}4 \times 10 \times 10^3 = 5{,}4 \times 10^{1+3} = 5{,}4 \times 10^4 \text{ km/h}$$

4. Como para forrar uma face do cubo são necessários 6,25 cm^2 de papel, então a área da face do cubo, que é um quadrado é $A_F = 6{,}25$

Como a área do quadrado de lado a, é $A_F = a^2$, vem que a medida da aresta do cubo, ou do lado do quadrado é
$$a = \sqrt{6{,}25} = 2{,}25 \text{ cm}$$
E assim, como o volume do cubo de aresta a é a^3, temos que o volume do cubo é
$$V_C = a^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625 \text{ cm}^3$$

5.

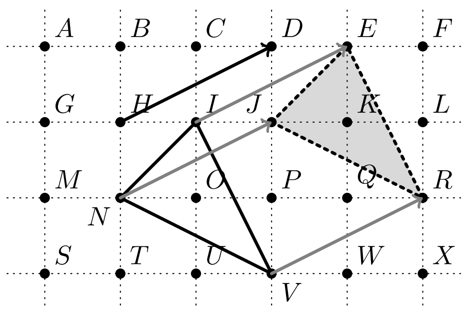
5.1. Podemos determinar a amplitude do ângulo BAC, porque $B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A = 180°$, logo
$$B\hat{A}C + 48 + 59 = 180 \Leftrightarrow B\hat{A}C = 180 - 48 - 59 \Leftrightarrow B\hat{A}C = 73°$$
Como os triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ são semelhantes, os ângulos correspondentes são iguais.
Como sabemos que o lado $[RQ]$ é o lado maior do triângulo $[PQR]$, o ângulo oposto a este lado (o ângulo QPR) é o ângulo de maior amplitude, e por isso, terá a mesma amplitude do ângulo BAC.
Logo $Q\hat{P}R = 73°$

5.2. Como a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança das figuras, temos que $\dfrac{A_{[ABC]}}{A_{[PQR]}} = 2^2$
Logo, substituindo o valor da área do triângulo $[ABC]$, vem:
$$\frac{18}{A_{[PQR]}} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{18}{A_{[PQR]}} = 4 \Leftrightarrow \frac{18}{4} = A_{[PQR]} \Leftrightarrow 4{,}5 = A_{[PQR]}$$
Resposta: **Opção C**

6.

6.1. Identificando o vetor $\overrightarrow{HD}$ como o vetor associado à translação que transforma o ponto H no ponto D, $H + \overrightarrow{HD} = D$, temos que
- $N + \overrightarrow{HD} = J$
- $I + \overrightarrow{HD} = E$
- $V + \overrightarrow{HD} = R$

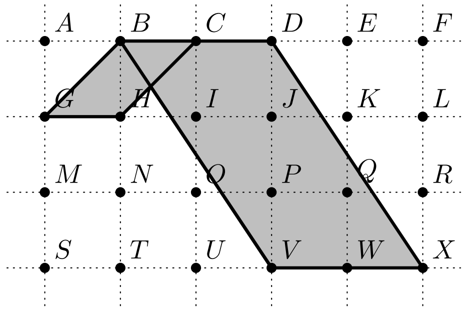
Logo, o transformado do triângulo $[NIV]$ pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{HD}$ é o triângulo $[JER]$



6.2. Como a área do paralelogramo é dada por $A_{[GBCH]} = b \times a$, e no caso do paralelogramo temos que a base (b) e altura (a) coincidem com a unidade do quadriculado, vem que:

$$A_{[GBCH]} = 4 \Leftrightarrow \overline{BC} \times \overline{BH} = 4 \Leftrightarrow \overline{BC} \times \overline{BC} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \overline{BC} = \sqrt{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2$$

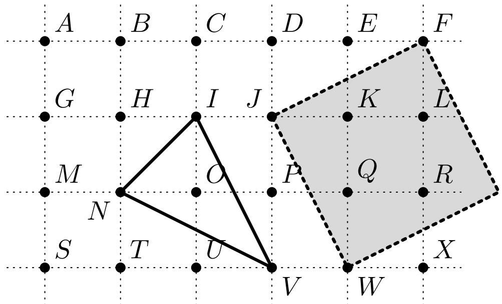


Pelo que temos que $\overline{VX} = 2 \times \overline{BC} = 2 \times 2 = 4$ e $\overline{VD} = 3 \times \overline{BC} = 3 \times 2 = 6$, e assim a área do paralelogramo $[BDXV]$ é

$$A_{[BDXV]} = \overline{VX} \times \overline{VD} = 4 \times 6 = 24$$

6.3. Considerando os dois quadrados de lado JF, o único que tem como outro vértice um dos pontos assinalados (representado na figura ao lado) é o quadrado com vértice no ponto W

Resposta: **Opção C**



7. Como os três lados do triângulo são diagonais de quadrados congruentes, então o triângulo é equilátero. Como o triângulo é equilátero então as amplitudes dos ângulos internos são iguais, e a soma é 180°, pelo que

$$A\hat{C}B + A\hat{B}C + B\hat{A}C = 180 \Leftrightarrow 3 \times A\hat{C}B = 180 \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{180}{3} \Leftrightarrow A\hat{C}B = 60°$$

8. Resolvendo a equação, temos:

$$2(1-x)+\frac{x+1}{2} = \frac{x}{3}-(x-3) \Leftrightarrow 2-2x+\frac{x+1}{2} = \frac{x}{3}-x+3 \Leftrightarrow \frac{2}{1}_{(6)} - \frac{2x}{1}_{(6)} + \frac{x+1}{2}_{(3)} = \frac{x}{3}_{(2)} - \frac{x}{1}_{(6)} + \frac{3}{1}_{(6)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{6} - \frac{12x}{6} + \frac{3x+3}{6} = \frac{2x}{6} - \frac{6x}{6} + \frac{18}{6} \Leftrightarrow 12 - 12x + 3x + 3 = 2x - 6x + 18 \Leftrightarrow 15 - 9x = -4x + 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x + 4x = 18 - 15 \Leftrightarrow -5x = 3 \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$$

C.S.$=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$

9.

9.1. Pela observação dos quatro primeiros termos é possível afirmar que o termo de ordem n tem n azulejos brancos, pelo que o termo de ordem 2012, ou o 2012º termo, terá 2012 azulejos brancos.

Resposta: **Opção B**

9.2. Calculando o número total de azulejos em cada termo como a soma dos azulejos brancos e cinzentos, temos

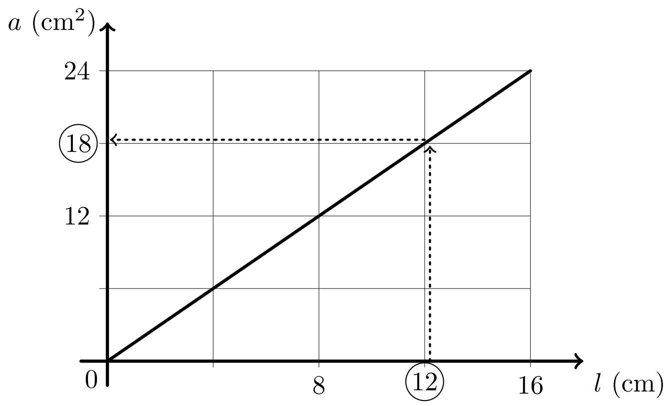
- 1º termo: 1 branco e 1×2 cinzentos, $1 + 1 \times 2 = 3$ azulejos
- 2º termo: 2 brancos e 2×3 cinzentos, $2 + 2 \times 3 = 7$ azulejos
- 3º termo: 3 brancos e 3×4 cinzentos, $3 + 3 \times 4 = 15$ azulejos
- 4º termo: 4 brancos e 4×5 cinzentos, $4 + 4 \times 5 = 24$ azulejos

Assim, identificando a regularidade podemos calcular o número total de azulejos do 9º termo da sequência:

9º termo: 9 brancos e 9×10 cinzentos, $9 + 9 \times 10 = 99$ azulejos

10.

10.1. Por observação do gráfico (ver a figura ao lado) podemos verificar que um retângulo de lado igual a 12 cm ($l = 12$) tem uma área correspondente de cm^2 ($a = 18$).



10.2. Recorrendo a um dos pontos do gráfico conhecidos, por exemplo o ponto (8,12), podemos determinar o valor de k (o comprimento dos retângulos), porque o retângulo correspondente ao ponto (8,12) do gráfico tem área $a = 12$, largura $l = 8$ e comprimento k, e assim

$$a = k \times l \Leftrightarrow 12 = k \times 8 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = k \Leftrightarrow \frac{3}{2} = k \Leftrightarrow 1{,}5 = k$$

Logo se a área do retângulo é 22,5 cm^2, podemos calcular o valor da largura:

$$a = k \times l \Leftrightarrow 22{,}5 = 1{,}5 \times l \Leftrightarrow \frac{22{,}5}{1{,}5} = l \Leftrightarrow 15 = l$$

Conhecidos o comprimento ($k = 1{,}5$ cm) e a largura ($l = 15$ cm), podemos calcular o perímetro do retângulo:

$$P = 2 \times c + 2 \times l = 2 \times 1{,}5 + 2 \times 15 = 3 + 30 = 33 \text{ cm}$$

11.

11.1. Os alunos que tiveram classificação superior a 12 valores, são 5 com classificação 14, 3 com classificação 15 e 2 com classificação 18, pelo que a média das classificações destes alunos é

$$\overline{x} = \frac{5 \times 14 + 3 \times 15 + 2 \times 18}{5 + 3 + 2} = \frac{70 + 45 + 36}{10} = \frac{151}{10} = 15{,}1$$

11.2. Como sabemos que a mediana é 13, e 13 não é uma das classificações registadas, então o número de classificações é par e a mediana foi calculada como a média dos dois valores centrais:

$$\underbrace{9\ \ 9\ \ 10 \ldots\ 10\ \ 12\ \ \ldots\ 12}_{50\%}\ \underbrace{14\ \ \ldots\ 14\ \ 15\ \ 15\ \ 15\ \ 18\ \ 18}_{50\%}$$

$$\tilde{x} = \frac{12+14}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

Assim, podemos calcular o valor de a, porque a soma das frequências das classificações inferiores a 13 é igual à soma das classificações superiores a 13:

$$2 + a + a = 5 + 3 + 2 \Leftrightarrow 2 + 2a = 10 \Leftrightarrow 2a = 10 - 2 \Leftrightarrow a = \frac{8}{2} \Leftrightarrow a = 4$$