Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
09 de fevereiro de 2009

Proposta de resolução

1\.

1.1. Como o João tem 14 anos, e os múltiplos de da idade do João, inferiores ou iguais a 90 são 6 (14, 28, 42, 56, 70 e 84).
Assim, para que a rifa premiada tenha um número múltiplo da idade do João, existem 6 casos favoráveis num conjunto de 90 casos possíveis, pelo que, recorrendo à Lei de Laplace, a probabilidade é:

$$p = \frac{6}{90} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Resposta: **Opção A**

1.2. Organizando todas os produtos que é possível obter, com recurso a uma tabela, temos:

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Assim, é possível verificar que, de entre os 16 configurações possíveis de obter no lançamento dos 2 dados, em 10 delas o produto dos números saídos é menor ou igual a seis, e nas restantes 6 o produto dos números saídos é maior do que 6.
Desta forma podemos afirmar que é mais provável que o produto dos números saídos seja igual ou inferior a 6, ou seja, que a Ana tem maior probabilidade de fazer a viagem.

2\.

2.1. No total existem 50 sócios (ou seja 100%), dos quais 26% compraram 2 rifas.
Assim o número de sócios que compraram 2 rifas corresponde a 26% de 50, ou seja:

$$\frac{26}{100} \times 50 = 13 \text{ sócios}$$

2.2. Como a mediana foi calculada com um número par de dados (10), então corresponde á média das observações que surgem na 5ª e 6ª posições na lista ordenada dos dados, ou seja, na lista ordenada dos dados sabemos que os números que ocupam as 5ª e a 6ª posições, são, respetivamente 2 e 3:

$$\underbrace{?\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ 2}_{50\%}\ \underbrace{3\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?}_{50\%}$$

Como houve quatro sócios que compraram que compraram 1 rifa, todos os dados da lista ordenada inferiores a 2, são iguais a 1.
Como sabemos que houve três sócios que compraram 3 rifas e um que comprou 4 rifas, então, dos cinco dados da lista ordenada superiores a 2, sabemos que existem três 3 e um 4, e que não existem números superiores a 4.

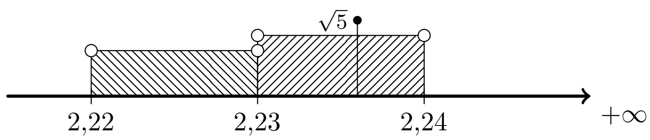
$$\underbrace{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 2}_{50\%}\ \underbrace{3\ \ 3\ \ 3\ \ ?\ \ 4}_{50\%}$$

Assim, para além dos quatro sócios que compraram 1 rifa, dos três que compraram 3 rifas e do sócio que comprou 4 rifas, restam dois sócios e sabemos que um deles comprou 2 rifas e outro que pode ter comprado 3 ou 4 rifas.

3. Como $\sqrt{5}$ é uma dízima infinita não periódica (um número irracional) e nas opções (C) e (D) estão representados dois conjuntos com 2 elementos que são números racionais podemos afirmar que

- $\sqrt{5} \notin \{2{,}22; 2{,}23\}$
- $\sqrt{5} \notin \{2{,}23; 2{,}24\}$

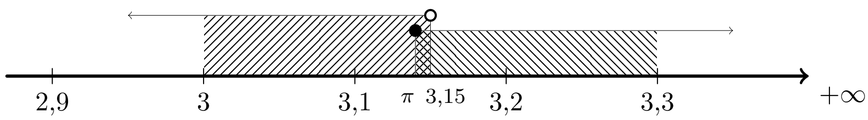
Como $\sqrt{5} \approx 2{,}236$, representando na reta real os intervalos das opções (A) e (B), temos:



Logo podemos verificar que $\sqrt{5} \in]2{,}23; 2{,}24[$

Resposta: **Opção B**

4. Representando os dois intervalos indicados na definição do conjunto B na reta real, temos:



Como $\pi < 3{,}15$ temos que $B = [\pi; 3{,}15[$

5. Como o tabuleiro vai ter uma área de 32 400 cm^2, e vai ser dividido em 64 quadrados pequenos, todos geometricamente iguais, então, a área de cada um dos quadrados pequenos é:

$$A_p = \frac{32\,400}{64} = 506{,}25 \text{ cm}^2$$

E assim, o lado, em centímetros, de cada um dos quadrados pequenos é:

$$l_p = \sqrt{506{,}25} = 22{,}5 \text{ cm}$$

Como o lado de cada um dos quadrados pequenos é igual ao diâmetro da base da maior peça que pode ser usada, então as maiores peças que podem ser usadas têm bases com 22,5 cm de diâmetro.

6.

6.1. Como se pretende que a receita total da vendas das rifas seja de 180 euros, designado por k o número de rifas que deveriam ser vendidas para que o preço de cada uma fosse 1,5 euros, então vem que:

$$k \times 1{,}5 = 180 \Leftrightarrow k = \frac{180}{1{,}5} \Leftrightarrow k = 120$$

6.2. Como o número de rifas (n) é inversamente proporcional ao preço (p), em euros, de cada rifa, temos que o produto das variáveis é a constante de proporcionalidade (c), ou seja,

$$n \times p = c, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo podemos calcular a constante de proporcionalidade, multiplicando quaisquer dois valores correspondentes de n e p :

$$c = 3 \times 60 = 4 \times 45 = 5 \times 36 = 180$$

Pelo que a constante de proporcionalidade é 180

6.3. Como 0 número de rifas (n) é inversamente proporcional ao preço (p), em euros, de cada rifa, e a constante de proporcionalidade é 180, temos que:

$$n \times p = 180 \Leftrightarrow p = \frac{180}{n}$$

Resposta: **Opção D**

7. Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} 3x = y \\ 3(x+y) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y \\ 3(x+3x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y \\ 3(4x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y \\ 12x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y \\ x = \frac{4}{12}_{(\div 4)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{1}{3}\right) = y \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3} = y \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = y \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

C.S.$= \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1 \right) \right\}$

8. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{3(x-2)}{5} \leq 3 \Leftrightarrow 3(x-2) \leq 3 \times 5 \Leftrightarrow 3x - 6 \leq 15 \Leftrightarrow 3x \leq 15 + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 21 \Leftrightarrow x \leq \frac{21}{3} \Leftrightarrow x \leq 7$$

C.S.$=]-\infty, 7]$

9. Designando por x o preço, em euros, da torrada, e por y o preço, em euros, do sumo natural, como sabemos que a Sara gastou 2,25 euros num sumo natural e numa torrada, temos que

$$x + y = 2{,}25$$

Por outro lado, como O sumo custou mais 55 cêntimos do que a torrada, ou seja, mais 0,55 euros, temos que somando 0,55 euros ao preço da torrada, temos o preço do sumo natural, ou seja

$$x + 0{,}55 = y$$

Assim, podemos escrever um sistema e resolvê-lo determinar os preços da torrada e do sumo natural:

$$\begin{cases} x + y = 2{,}25 \\ x + 0{,}55 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x + 0{,}55 = 2{,}25 \\ x + 0{,}55 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2{,}25 - 0{,}55 \\ x + 0{,}55 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1{,}7}{2} \\ x + 0{,}55 = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}85 \\ 0{,}85 + 0{,}55 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}85 \\ 1{,}4 = y \end{cases}$$

Assim temos que a torrada custou 0,85 euros, ou seja 85 cêntimos e o sumo natural custou 1,4 euros, ou seja, 1 euro e 40 cêntimos.

10. Temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Leftrightarrow x = \overline{AB} + 8 \Leftrightarrow x - 8 = \overline{AB}$$

Como:

- $\overline{AF} = \overline{FE} = \overline{AC} = x$
- $\overline{BG} = \overline{GD} = \overline{BC} = 8$
- $\overline{AB} = \overline{DE} = x - 9$,

Vem que o perímetro da região sombreada é:

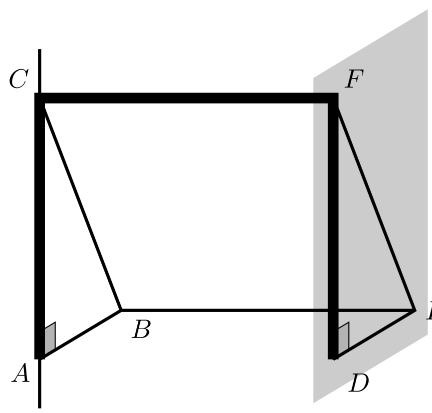
$$P_S = \overline{AB} + \overline{DE} + \overline{BG} + \overline{GD} + \overline{AF} + \overline{FE} = 2\overline{AB} + 2\overline{BG} + 2\overline{AF} =$$

$$= 2x + 2 \times 8 + 2(x - 8) = 2x + 16 + 2x - 16 = 2x + 2x = 4x$$

11.

11.1. Como o poste representado pelo segmento $[AC]$ é paralelo ao poste representado pelo segmento $[DF]$, e este está contido no plano DEF, então o poste representado pelo segmento $[AC]$ é estritamente paralelo ao plano DEF

Resposta: **Opção B**



11.2. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A, recorrendo ao Teorema de Pitágoras para determinar a mediada do lado $[BC]$, vem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 120^2 + 160^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 14\,400 + 25\,600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 40\,000 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \overline{BC} = \sqrt{40\,000} \Leftrightarrow \overline{BC} = 200 \text{ cm}$$

Assim, a área do retângulo $[BEFC]$ é

$$A_{[BEFC]} = \overline{BE} \times \overline{BC} = 180 \times 200 = 36\,000 \text{ cm}^2$$