Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
3 de fevereiro de 2010

Proposta de resolução

1.

1.1. Organizando as somas dos números de cada face numa tabela, temos:

Face	$1-0-0$	$1-1-1$	$1-1-0$	$2-2-2$	$2-1-0$	$1-0-3$
Soma	1	3	2	6	3	4

Pelo que observar que,

- como a soma é um número par em 3 das 6 faces, a probabilidade do porta-voz ser o Pedro é

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- como a soma é um número ímpar, maior que 1, em 2 das 6 faces, a probabilidade do porta-voz ser a Rita é

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- como a soma é o número 1 apenas em uma das 6 faces, a probabilidade do porta-voz ser o Jorge é

$$p = \frac{1}{6}$$

Desta forma podemos afirmar que os três amigos não têm a mesma probabilidade de ser porta-voz. É mais provável que o Pedro seja o porta-voz do que a Rita ou o Jorge. E a probabilididade da Rita ser porta-voz é maior que a probabilidade do Jorge ser escolhido.

1.2. Como o dado tem 6 faces e a probabilidade de, ao lançar o dado, uma face do tipo $\boxed{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix}}$ ficar voltada para cima é $\frac{1}{3}$, então existem 2 faces deste tipo, porque

$$6 \times \frac{1}{3} = 2$$

Logo, o número de faces do tipo $\boxed{\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix}}$ é 4, porque só existem faces destes dois tipos e se ao total (6 faces) subtrairmos o número de faces do outro tipo, obtemos o número de faces deste tipo $(6-2=4)$.

Resposta: **Opção C**

2. Como existem 5 lugares disponíveis, dos quais 2 são são separados, recorrendo à Regra de Laplace, existem 5 casos possíveis e 2 casos favoráveis para que o Pedro fique separado dos amigos, pelo que a probabilidade é

$$p = \frac{2}{5}$$

3. Como a Rita (que é a aluna mais alta da turma) mede 180 cm, e a altura média das raparigas é 150 cm, se o número de raparigas da turma fosse 2, definindo a altura da rapariga mais baixa com b, teríamos que

$$\frac{180+b}{2} = 150 \Leftrightarrow 180+b = 150\times 2 \Leftrightarrow b = 300-180 \Leftrightarrow b = 120 \text{ cm}$$

Ou seja, a rapariga mais baixa deveria medir 120 cm para que a altura média das raparigas fosse 150 cm, o que não pode acontecer porque o aluno mais baixo da turma é o Jorge que mede 120 cm.

4.

4.1. Podemos identificar em cada construção, quadrados divididos em 2 triângulos do tipo dos que são contados.
Verificando que

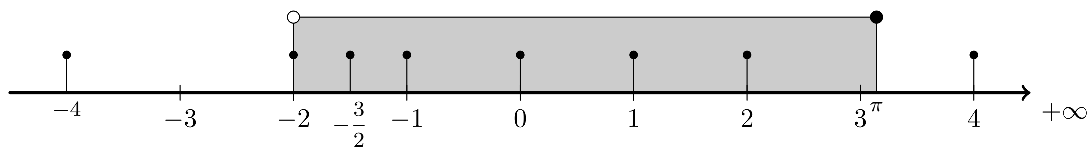
- na 1ª construção existe 1 quadrado, e por isso, $2\times 1 = 2$ triângulos
- na 2ª construção existem $2^2 = 4$ quadrados, e por isso, $2\times 4 = 8$ triângulos
- na 3ª construção existem $3^2 = 9$ quadrados, e por isso, $2\times 9 = 18$ triângulos

então na 5ª construção existem $5^2 = 25$ quadrados, e por isso, $2\times 25 = 50$ triângulos.

4.2. De acordo com a verificação anterior podemos afirmar que na construção de ordem n existem n^2 quadrados, e por isso, $2\times n^2 = 2n^2$ triângulos.

Resposta: **Opção D**

5. Como $\pi \approx 3{,}14159$, representando na reta real o intervalo $]-2,\pi]$, e os números indicados nas opções, temos:



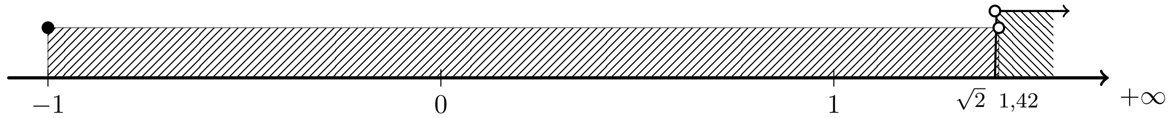
Assim, podemos verificar que

- $4 \notin I$, logo $\left\{-\frac{3}{2},2,4\right\} \not\subset I$
- $-2 \notin I$, logo $\left\{-2,-1,2\right\} \not\subset I$
- $-4 \notin I$, logo $\left\{-4,-1,0\right\} \not\subset I$

e que $\left\{-\frac{3}{2},0,1\right\} \subset I$

Resposta: **Opção B**

6. Como $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, representando os dois intervalos indicados na definição do conjunto B na reta real, temos:



Assim temos que $B = [-1;1{,}42\,[\cap \,]\sqrt{2},+\infty[\,=\,]\sqrt{2};1{,}42[$

7. Como $\sqrt{5}+\sqrt{7}\approx 4{,}882$, então o valor aproximado, por excesso, a menos de uma centésima é

$$4{,}88+0{,}01=4{,}89$$

8. Quando a água começa a ser colocada no reservatório, vai encher, numa primeira fase do enchimento, a parte do reservatório com a forma de um cone, e quando esta parte estiver cheia começará a encher, numa segunda fase, a parte cilíndrica.
Assim, a mesma quantidade de água (o que corresponde a um período de tempo igual) não produz o mesmo aumento da altura da água do reservatório, na primeira fase do enchimento e na segunda.

Na primeira fase do enchimento o aumento da altura será cada vez mais lento, porque a mesma quantidade de água provocará um aumento da altura maior junto ao vértice do cone e menor junto da base do cone. Na segunda fase do enchimento a altura irá variar de forma constante, porque a mesma quantidade de água corresponde a uma variação da altura da água igual, independentemente de considerarmos a parte inferior ou superior do cilindro.

Assim o único gráfico que correponde a esta variação em duas fases, com uma desaceleração na primeira fase e uma variação constante na segunda é o gráfico da opção (D).

Resposta: **Opção D**

9. Designando por x o número de pessoas no grupo de amigos, e por y o preço, em euros, do almoço, como sabemos que se os x amigos pagarem 14 euros cada um, ou seja $x\times 14$, ou ainda $14x$ a quantia é total é o peço do almoço menos 4 euros, isto é $y-4$, logo temos que

$$14x=y-4$$

Da mesma forma, se os x amigos pagarem 16 euros cada um, ou seja $16x$ a quantia apurada é $y+6$ pelo que sabemos que

$$16x=y+6$$

Assim, podemos escrever um sistema e resolvê-lo determinar o valor de y, e depois dividir pelo valor de x:

$$\begin{cases}14x=y-4\\ 16x=y+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x+4=y\\ 16x=14x+4+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x+4=y\\ 16x-14x=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x+4=y\\ 2x=10\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}14x+4=y\\ x=\dfrac{10}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14(5)+4=y\\ x=5\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}70+4=y\\ x=5\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}74=y\\ x=5\end{cases}$$

Assim, temos que, o preço do almoço é de 74 euros e são 5 amigos, pelo que, cada um deles deve pagar $\dfrac{74}{5}=14{,}8$ euros, ou seja, 14 euros e 80 cêntimos.

10.

10.1. De acordo com o enunciado, sabemos que a massa (p) de cada uma das fatias de bolo é inversamente proporcional ao número de fatias (n), ou seja, $p\times n=k$
Podemos calcular o valor da constante de proporcionalidade inversa, k, pelo produto de valores correspondentes de n e p:

$$6\times 0{,}60=8\times 4{,}5=10\times 0{,}36=3{,}6$$

Desta forma, o valor da constante de proporcionalidade inversa é obtido multiplicando o número de fatias pela massa de cada fatia, o que em cada caso, corresponde à massa total do bolo, que é 3,6 kg

10.2. Como as variáveis p e n são inversamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 3,6 temos que

$$p \times n = 3{,}6 \Leftrightarrow p = \frac{3{,}6}{n}$$

11. Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} y - 3x = 0 \\ \\ x + 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ \\ x + 2(3x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ \\ x + 6x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ \\ 7x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ \\ x = \frac{1}{2 \times 7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \times \frac{1}{14} \\ \\ x = \frac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{14} \\ \\ x = \frac{1}{14} \end{cases}$$

C.S. $= \left\{ \left(\frac{1}{14}, \frac{3}{14} \right) \right\}$

12. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{7(2-x)}{3} \geq 7 \Leftrightarrow \frac{14-7x}{3} \geq 7 \Leftrightarrow 14 - 7x \geq 7 \times 3 \Leftrightarrow -7x \geq 21 - 14 \Leftrightarrow -7x \geq 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x \leq -7 \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{7} \Leftrightarrow x \leq -1$$

C.S.$=]-\infty, -1]$

13.

13.1. Como os pontos E e F são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente, e a medida do lado do quadrado é 10, temos que $\overline{BE} = \overline{BF} = 5$
E assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\overline{EF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 25 + 25 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 50 \underset{\overline{EF}>0}{\Rightarrow} \overline{EF} = \sqrt{50}$$

Escrevendo o resultado arredondado às décimas, temos

$$\overline{EF} = \sqrt{50} \approx 7{,}1$$

13.2. Como $\overline{AB} = \overline{BC} = 10$ e E e F são pontos médios de $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente, então vem que

$$\overline{EB} = \overline{BF} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

E assim, calculando a área do triângulo $[BEF]$, vem

$$A_{[BEF]} = \frac{\overline{EB} \times \overline{BF}}{2} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

Observando que os triângulos $[BEF]$ e $[DGH]$ são congruentes, podemos calcular a área da região sombreada como a diferença entre as áreas do quadrado $[ABCD]$ e dos triângulos $[BEF]$ e $[DGH]$:

$$A_{[AEFCGH]} = A_{[ABCD]} - 2 \times A_{[EBF]} = 10 \times 10 - 2 \times \frac{25}{2} = 100 - 25 = 75$$

Resposta: **Opção B**