# Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
# 11 de maio de 2010

## Proposta de resolução

1. Como são 30 autocolantes no total (número de casos possíveis), dos quais 3 têm imagens de aves (retirando ao número total o número de autocolantes com mamíferos e de peixes, obtemos o número de autocolantes com imagens de aves $30 - 16 - 11 = 3$), temos que, calculando a probabilidade com recurso à regra de Laplace, vem

$$p = \frac{3}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

A que corresponde uma probabilidade de 10%

**Opção B**

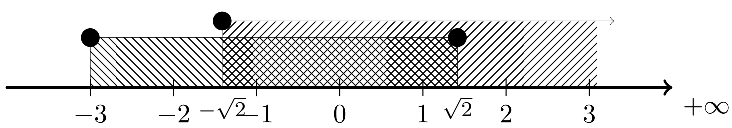
2. Esta contagem pode ser realizada através de uma lista. Designado a cor amarela por "A", a cor verde por "V"e a cor rosa por "R", vem:

- A-V-R
- A-R-V
- V-A-R
- V-R-A
- R-A-V
- R-V-A

Podemos verificar que, para pintar a primeira tira, a Rita tem 3 opções possíveis. Depois de escolher a primeira cor, para a segunda tira só existem 2 opções possíveis (excluindo a cor já utilizada antes) e, depois de selecionadas as primeiras duas cores, para a última tira deve ser usada a única cor que ainda não foi usada. Assim o número de opções pode ser calculada como

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

3. Como $-\sqrt{2} \approx -1{,}41$ e $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, representando os dois intervalos indicados na definição do conjunto $P$ na reta real , temos:




Assim temos que $[-3,\sqrt{2}] \cap [-\sqrt{2}, +\infty[ = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

Resposta: **Opção A**

4. Como
   - $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, temos que $\sqrt{\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$
   - $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$, temos que $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} \in \mathbb{Q}$
   - $\sqrt[3]{27} = 3$, temos que $\sqrt[3]{27} \in \mathbb{Q}$

   e $\sqrt{27}$ é uma dizíma infinita não periódica, o elemento do conjunto $S$ que é um número irracional é $\sqrt{27}$

5. Substituindo os valores dos pares ordenados na equação, para identificar com qual deles se obtém uma proposição verdadeira, temos:
   - Opção (A): $3(-3) = 15 - 6 \Leftrightarrow -9 = 9$ (Proposição falsa)
   - Opção (B): $3(-6) = 15 - 3 \Leftrightarrow -18 = 12$ (Proposição falsa)
   - Opção (C): $3(3) = 15 - 6 \Leftrightarrow 9 = 9$ (Proposição verdadeira)
   - Opção (D): $3(6) = 15 - 3 \Leftrightarrow 18 = 12$ (Proposição falsa)

   Resposta: **Opção C**

6. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{2(1-x)}{3} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2-2x}{3} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{3}_{(4)} - \frac{2x}{3}_{(4)} \geq \frac{1}{4}_{(3)} \Leftrightarrow \frac{8}{12} - \frac{8x}{12} \geq \frac{3}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 8x \geq 3 \Leftrightarrow -8x \geq 3 - 8 \Leftrightarrow -8x \geq -5 \Leftrightarrow 8x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{8}$$

   C.S.$=\left]-\infty, \frac{5}{8}\right]$

7.

   7.1. Substituindo $C$ por $-25$ na fórmula, calculamos o valor de $F$ correspondente, ou seja, o valor da temperatura, em graus Fahrenheit, correspondente a $-25$ graus Celsius:

$$F = 1{,}8(-25) + 32 \Leftrightarrow F = -45 + 32 \Leftrightarrow F = -13$$

   7.2. Substituindo $F$ por 95 na fórmula, calculamos o valor de $C$ correspondente, ou seja, o valor da temperatura, em graus Celsius, correspondente a 95 graus Fahrenheit:

$$95 = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow 95 - 32 = 1{,}8C \Leftrightarrow \frac{63}{1{,}8} = C \Leftrightarrow C = 35$$

   7.3. A relação $F = 1{,}8C + 32$ pode ser representada graficamente por uma reta de declice positivo e ordenada na origem também positiva.

   O gráfico A é parte de uma reta de declive negativo, pelo que não pode representar a relação entre $F$ e $C$.

   O gráfico B é parte de uma reta cuja ordenada na origem é negativa, pelo que também não pode representar a relação entre $F$ e $C$.

8. Utilizando a propriedade enunciada, temos que, como $[ABCD]$ é um trapézio inscrito na circunferência, então

$$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BD}$$

Como $\overline{AD} = \overline{BC}$, e subsituindo as medidas conhecidas, temos que

$$12 \times 9 + \overline{AD} \times \overline{AD} = \sqrt{150} \times \sqrt{150} \Leftrightarrow 108 + \overline{AD}^2 = \left(\sqrt{150}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 150 - 108 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 42 \underset{\overline{AD}>0}{\Rightarrow} \overline{AD} = \sqrt{42}$$

9. Como $x$ é o número de moedas de 20 cêntimos e $y$ é o número de moedas de 50 cêntimos que a Rita tem no mealheiro, e no total tem 17 moedas dos dois tipos, temos que

$$x + y = 17$$

Por outro lado $x \times 0{,}2$, ou $0{,}2x$, é a quantia, em euros, que a Rita tem considerando apenas as $x$ moedas de 20 cêntimos (ou 0,2 euros). E da mesma forma $0{,}5y$ é a quantia, em euros, que a Rita tem considerando apenas as $y$ moedas de 50 cêntimos (ou 0,5 euros), pelo que, como a quantia total é de 5,5 euros, temos que

$$0{,}2x + 0{,}5y = 5{,}5$$

Assim, um sistema que permite determinar quantas moedas de 20 cêntimos e quantas moedas de 50 cêntimos tem a Rita no mealheiro, é

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 5{,}5 \end{cases}$$

Resposta: **Opção B**

10. Como os triângulos $[ABD]$ e $[ECD]$ são semelhantes (porque têm um ângulo agudo em comum e os ângulos $ECD$ e $ABD$ são retos), podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EC}}$$

Logo, temos que

$$\frac{\overline{BD}}{2{,}5} = \frac{4{,}8}{1{,}6} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4{,}8 \times 2{,}5}{1{,}6} \Leftrightarrow \overline{BD} = 7{,}5$$

Finalmente, como $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{BD} - \overline{DC}$, vem:

$$\overline{BC} = 7{,}5 - 2{,}5 \Leftrightarrow \overline{BC} = 5$$

11.

11.1. Como qualquer hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, o triângulo $[DOC]$ é equilátero, pelo que os seus ângulos são todos iguais.
Assim, temos que

$$3 \times D\hat{O}C = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}C = \frac{180}{3} \Leftrightarrow D\hat{O}C = 60°$$

11.2. Como a circunferência tem raio 4, temos que a área do círculo correspondente, é

$$A_\circ = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

Como o hexágono pode ser dividido em 6 triângulos congruentes com o triângulo $[DOC]$, temos que área do hexágono $[ABCDEF]$ é

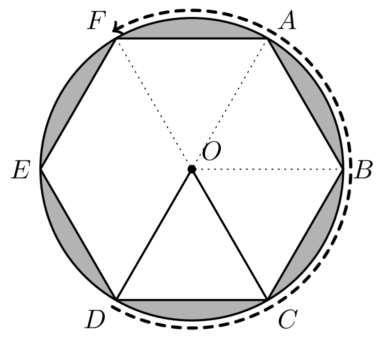
$$A_{[ABCDEF]} = 6 \times A_{[DOC]} = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

E assim, calculando a área da região sombreada, $A_S$, como a diferença das áreas do círculo e do hexágono, e arredondando o resultado às unidades temos

$$A_\circ - A_{[ABCDEF]} = 16\pi - 24\sqrt{3} \approx 9$$

11.3. Como os ângulos internos de um triângulo equilátero têm amplitude 60°, uma rotação de de amplitude 240° corresponde a 4 ângulos internos de triângulos equiláteros ($4 \times 60 = 240°$).

Assim, temos que o transformado do ponto $D$ pela rotação de centro no ponto $O$ e de amplitude 240° é o ponto $F$ (como se pode observar na figura ao lado).




12. Como o triângulo $[ABD]$ é retângulo em $C$, o lado $[AB]$ é a hipotenusa, e relativamente ao ângulo $CAB$, $[BC]$ é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen}\,(C\hat{A}B) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{sen}\,(C\hat{A}B) = \frac{1{,}7}{2{,}5} \Leftrightarrow \text{sen}\,(C\hat{A}B) = 0{,}68$$

Assim, procurando o valor mais próximo de 0,68 na coluna dos valores do seno na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo $CAB$ às unidades, temos que

$$C\hat{A}B = \text{sen}^{-1}\,(0{,}68) \approx 43°$$

13.