

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2013, 1.ª fase)
Proposta de resolução



1.

1.1. Aplicando o método descrito, incluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bullying*: $3 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 2015$
- Pontuação do tema Solidariedade: $2 \times 415 + 3 \times 370 + 1 \times 200 = 2140$
- Pontuação do tema Festas: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 3 \times 200 = 1755$

Excluindo o tema Festas, a tabela reorganizada, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, é a seguinte:

	415 votos	370 votos	200 votos
1ª Preferência	<i>Bullying</i>	Solidariedade	<i>Bullying</i>
2ª Preferência	Solidariedade	<i>Bullying</i>	Solidariedade

E assim, aplicando o método descrito, excluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bullying*: $2 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 1600$
- Pontuação do tema Solidariedade: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 1 \times 200 = 1355$

Assim, temos que com a inclusão do tema Festas, o tema escolhido é Solidariedade, porque tem a maior pontuação (2140 pontos) e, se o tema Festas for excluído, o tema escolhido é *Bullying* porque tem maior número de pontos (1600), pelo que podemos concluir que a exclusão do tema Festas altera a escolha do tema.

1.2. Aplicando o método descrito na distribuição dos 20 lugares na comissão, e sabendo que na primeira aplicação deste método, a soma das quotas arredondadas foi diferente do número de lugares a distribuir, começamos por determinar o divisor padrão:

$$\text{Divisor padrão} = \frac{140 + 120 + 160}{20} = \frac{420}{20} = 21$$

Após algumas experiências podemos verificar que o divisor modificado 21,5 permite a atribuição dos 20 lugares na comissão:

Ano de escolaridade	10.º	11.º	12.º
Número de alunos	140	120	160
Divisor modificado	21,5		
Quota modificada	$\frac{140}{21,5} \approx 6,512$	$\frac{120}{21,5} \approx 5,581$	$\frac{160}{21,5} \approx 7,442$
Quota modificada arredondada	$6 + 1 = 7$	$5 + 1 = 6$	7
Soma das quotas arredondadas	$7 + 6 + 7 = 20$		

Assim, a distribuição dos 20 lugares da comissão, é:

- 10.º ano: 7 lugares
- 11.º ano: 6 lugares
- 12.º ano: 7 lugares

2.

2.1. De acordo com as garantias oferecidas pela instituição PIPA, temos que:

- Capital final: $C_n = 1680\text{€}$
- Capital inicial: $C_n = 1500\text{€}$
- Número de períodos de capitalização: $n = \frac{6}{3} = 2$, ou seja 2 trimestres relativos a 6 meses
- i - Taxa de juro referente ao período de capitalização

Desta forma, como o capital final é dado pela expressão $C_n = C + C \times n \times i$, temos que:

$$1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i$$

E assim, resolvendo a equação, determinamos o valor da taxa de juro trimestral (i):

$$1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i \Leftrightarrow 1680 - 1500 = 3000 \times i \Leftrightarrow 180 = 3000 \times i \Leftrightarrow \frac{180}{3000} = i \Leftrightarrow 0,06 = i$$

Logo, a taxa de juro trimestral, na forma de percentagem, é 6%



2.2. Observando os dados da tabela, podemos verificar que a variação do capital na conta x é um aumento linear, ou seja, todos os meses ao capital existente é adicionada um valor fixo.

Da mesma forma podemos verificar que na conta Y , a variação do capital corresponde a um aumento exponencial, ou seja, todos os meses o capital é aumentado numa percentagem fixa, como se pode observar na tabela seguinte:

	Final do 1.º mês	Final do 2.º mês	Final do 3.º mês	Final do 4.º mês	Final do 5.º mês	Final do 6.º mês
X	$1500+20 =$ 1520	$1520+20 =$ 1540	$1540+20 =$ 1560	$1560+20 =$ 1580	$1580+20 =$ 1600	$1600+20 =$ 1620
Y	$1500 \times 1,01 =$ 1515	$1515 \times 1,01 =$ 1530,15	$1530,15 \times 1,01 =$ 1545,45	$1545,45 \times 1,01 =$ 1560,91	$1560,91 \times 1,01 =$ 1576,52	$1576 \times 1,01 =$ 1592,28

Assim temos que, o capital, no final do n -ésimo mês é dado pelas expressões:

- Conta X : $1500 + \underbrace{20 + 20 + \dots + 20}_{n \text{ vezes}} = 1500 + n \times 20$

$$X(n) = 1500 + 20n$$

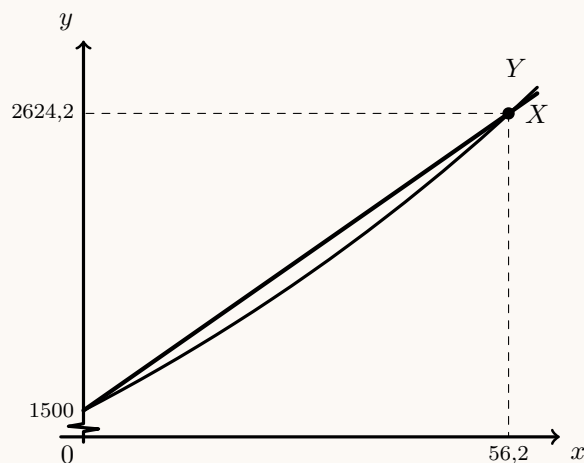
- Conta Y : $1500 \times \underbrace{1,01 \times 1,01 \times \dots \times 1,01}_{n \text{ vezes}} = 1500 \times 1,01^n$

$$Y(n) = 1500 \times 1,01^n$$

Representamos na calculadora gráfica os gráficos dos modelos da variação do capital em cada uma das contas, ambos em função da tempo, ($y = 1500 + 20x$, para a conta X) e ($y = 1500 \times 1,01^x$, para a conta Y), numa janela compatível com horizonte temporal indicado pela Carla, ou seja, $0 \leq x \leq 60$ e também com os valores do capital correspondentes, ou seja, $1500 \leq y < 3000$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção dos dois modelos, obtemos os valores (arredondados às décimas) das coordenadas do ponto de interseção, ou seja, o valor dos meses que devem passar para que os dois modelos indiquem o mesmo capital, ou seja, $(56,2; 2624,2)$

Assim, podemos verificar que de acordo com a variação dos dois modelos, o capital da conta Y é inferior ao da conta X até ao 56.º mês e superior a partir do 57.º mês, após os depósitos iniciais, pelo que se pode concluir que a Carla tem razão.



2.3.

2.3.1. De acordo com o modelo, um período de capitalização igual a 10 meses, corresponde a $x = 10$, e assim, temos que, o número de aplicações feitas no fundo, com arredondamento às unidades, é:

$$N(10) = \frac{30}{1 + 16 \times e^{-1,15 \times 10}} \approx 30 \text{ aplicações}$$



2.3.2. De acordo com o modelo apresentado, no dia 3 de setembro de 2012, o número de aplicações feitas a 3 meses e a 6 meses, são, respetivamente:

$$\bullet N(3) = \frac{30}{1 + 16 \times e^{-1,15 \times 3}} \approx 20$$

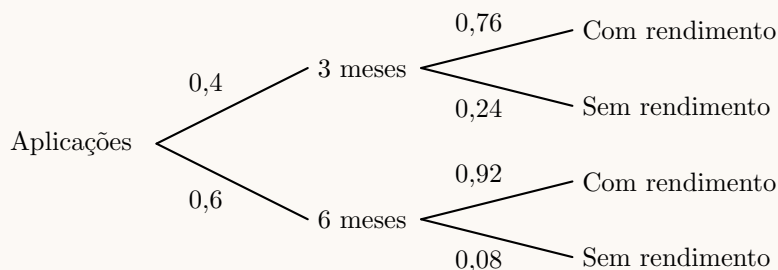
$$\bullet N(6) = \frac{30}{1 + 16 \times e^{-1,15 \times 6}} \approx 30$$

Como só existiam estas duas possibilidades de capitalização, foram estas as 50 aplicações feitas, sendo a probabilidade de cada uma, respetivamente:

$$\bullet 3 \text{ meses: } \frac{20}{50} = 0,4$$

$$\bullet 6 \text{ meses: } \frac{30}{50} = 0,6$$

Assim, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, uma aplicação no fundo feita no dia 3 de setembro de 2012, e os acontecimentos:

M_3 : «A aplicação foi feita por um período de capitalização de 3 meses»

L : «A aplicação obteve rendimento»

Temos que, a probabilidade de a aplicação escolhida ter um período de capitalização igual a 3 meses, sabendo que obteve rendimento, na forma de fração irredutível, é:

$$P(M_3|L) = \frac{P(M_3 \cap L)}{P(L)} = \frac{P(M_3 \cap L)}{P(M_3 \cap L) + P(\bar{M}_3 \cap L)} = \frac{0,4 \times 0,76}{0,4 \times 0,76 + 0,6 \times 0,92} = \frac{0,304}{0,856} = \frac{38}{107}$$

3.

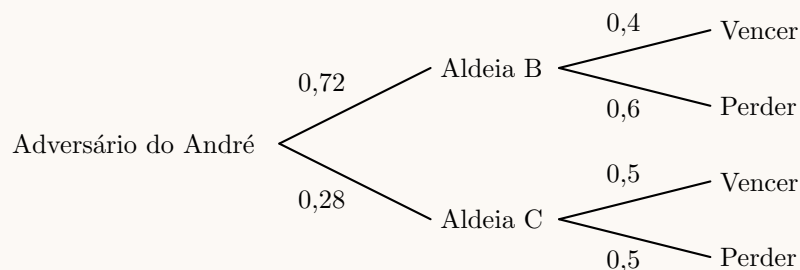
3.1. De acordo com as probabilidades apresentadas, temos que:

- $P(V \cap A) = P(V|A) \times P(A) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$
- $P(V \cap B) = P(V|B) \times P(B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$
- $P(V \cap C) = P(V|C) \times P(C) = 0,5 \times 0,25 = 0,125$
- $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) + P(V \cap C) = 0,015 + 0,28 + 0,125 = 0,42$
- $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0,42 = 0,58$
- $P(\bar{V} \cap A) = P(A) - P(V \cap A) = 0,05 - 0,015 = 0,035$
- $P(\bar{V} \cap B) = P(B) - P(V \cap B) = 0,7 - 0,28 = 0,42$
- $P(\bar{V} \cap C) = P(C) - P(V \cap C) = 0,25 - 0,125 = 0,125$

Acontecimentos	A	B	C	Total
V	0,015	0,28	0,125	0,42
\bar{V}	0,035	0,42	0,125	0,58
Total	0,05	0,70	0,25	1



3.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, uma partida do torneio de xadrez, temos que, a probabilidade de o André vencer uma partida, é:

$$P(V) = P(V \cap B) + P(V \cap C) = 0,72 \times 0,4 + 0,28 \times 0,5 = 0,428$$

4.

4.1. Utilizando a informação da tabela dada na coluna (apresentada a sombreado na tabela seguinte), podemos determinar as frequências absolutas simples, recorrendo a subtrações sucessivas.

Fazendo a divisão de cada frequência absoluta simples pelo total de saquetas podemos obter as frequências relativas simples, e finalmente, por somas sucessivas, podemos obter as frequências absolutas acumuladas:

Número de filhos	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
1	78	78	$\frac{78}{200} = 0,39$	0,39
2	$166 - 78 = 88$	166	$\frac{88}{200} = 0,44$	$0,39 + 0,44 = 0,83$
3	$184 - 166 = 18$	184	$\frac{18}{200} = 0,09$	$0,83 + 0,09 = 0,92$
4	$196 - 184 = 12$	196	$\frac{12}{200} = 0,06$	$0,92 + 0,06 = 0,98$
5	$200 - 196 = 4$	200	$\frac{4}{200} = 0,02$	$0,98 + 0,02 = 1$
Total	200	—	1	—



4.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números de filhos, e noutra lista as frequências absolutas simples:

Números de filhos	Frequência absoluta simples
1	66
2	46
3	38
4	38
5	12

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e do desvio padrão dos número de filhos da amostra:

$$\bar{x} = 2,42 \text{ e } s \approx 1,3$$

Procedendo da mesma forma com os dados corrigidos, ou seja substituindo os valores da primeira por 0, 1, 2, 3 e 4, e calculando novamente as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os novos valores da média e do desvio padrão dos número de filhos da amostra:

$$\bar{x} = 1,42 \text{ e } s \approx 1,3$$

Assim temos que:

- a média dos dados corrigidos é inferior à média inicial em 1 unidade, porque todos os valores são exatamente inferiores em 1 unidade para a mesma frequência absoluta;
- o desvio padrão é igual nas duas situações, porque mede os desvios dos dados em relação à média, e considerando a alteração da média, a posição relativa de cada dado em relação à média é igual nas duas situações.

4.3. Determinando a proporção amostral dos sócios que têm pelos 3 filhos, ou seja, a proporção de sócios que têm 3, 4 ou 5 filhos, temos:

$$\hat{p} = \frac{38 + 38 + 12}{200} = 0,44$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \right)$, nomeadamente o limite superior (0,530426), temos que:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,530426$$

Assim, substituindo os valores da proporção (\hat{p}) e de n ($n = 200$), e resolvendo a equação, temos que:

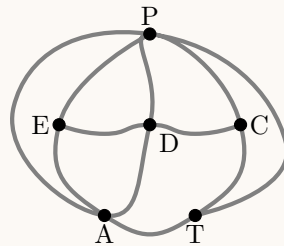
$$\begin{aligned} 0,44 + z \times \sqrt{\frac{0,44(1-0,44)}{200}} &= 0,530426 \Leftrightarrow z \times 0,035100 \approx 0,530426 - 0,44 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &\approx \frac{0,090426}{0,035100} \Leftrightarrow z \approx 2,576239 \end{aligned}$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 2,576$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 99%



5. De acordo com o esquema do espaço, considerando as salas e o pátio como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada vértice:

- P - Grau 5
- E - Grau 3
- D - Grau 4
- C - Grau 3
- A - Grau 4
- T - Grau 3

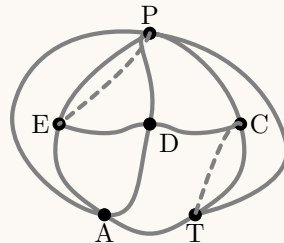


P - Pátio
E - Exposição
D - Espaço de debate
C - Cantina
A - Auditório
T - Teatro

A funcionária não consegue efetuar uma ronda ao recinto começando e terminando essa ronda na cantina, percorrendo todas as portas e passando por cada porta uma única vez porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem quatro vértices com grau ímpar: E, C e T (todos com grau 3) e P (com grau 5).

Assim, a solução para o problema da funcionária, passa por duplicar arestas que permitam obter um grafo conexo com todos os vértices com grau par, por exemplo duplicando as arestas PE e CT (assinaladas a tracejado na figura seguinte), o que corresponde a passar nessas duas portas, por duas vezes, ficando desta forma todos os vértices com grau par, como se apresenta na figura seguinte:

- P - Grau 6
- E - Grau 4
- D - Grau 4
- C - Grau 4
- A - Grau 4
- T - Grau 4



Assim, uma possibilidade para organizar a ronda ao recinto começando e terminando na cantina, percorrendo todas as portas e passando o menor número de vezes possível por cada porta, é:

$$C \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow C$$

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

