

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2022, Época especial)
Proposta de resolução



1.

- 1.1. Como os 268 convites destinados ao núcleo A, devem ser distribuídos, de forma diretamente proporcional ao número de sócios, pelos outros dois núcleos, temos que o número de sócios dos núcleos B e C, é:

$$1152 + 395 = 1547$$

Pelo que, calculando a proporção c , dos 268 convites, correspondente ao núcleo C, temos:

$$\frac{1547}{268} = \frac{395}{c} \Leftrightarrow c = \frac{395 \times 268}{1547} \Rightarrow c \approx 68,4$$

Assim, temos que o número de convites que seriam atribuídos ao núcleo C, dos que foram dispensados pelo núcleo A, é 68.

Resposta: **Opção C**

- 1.2. Aplicando o método descrito, temos que:

	A	B	C
Número de sócios	939	1159	395
Total de sócios	$939 + 1150 + 395 = 2493$		
Divisor padrão	$\frac{2493}{710} \approx 3,51$		
Quota padrão	$\frac{939}{3,51} \approx 267,52$	$\frac{1159}{3,5} \approx 330,20$	$\frac{395}{5,31} \approx 112,54$
Primeira atribuição	267	330	112
Total provisório	$267 + 330 + 112 = 709$		
Segunda atribuição	0	0	1

Assim, temos que o número de convites que cada núcleo recebeu, é:

- Núcleo A: 267 convites
- Núcleo B: 330 convites
- Núcleo C: $112 + 1 = 113$ convites

2. De acordo com o método descrito, temos que a pontuação total do jogador P, é:

$$4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$$

Como o jogador Q obteve um total de 1400 pontos, e sabemos que não ficou na 4.^a preferência da lista 1 (porque essa preferência foi dada ao jogador S), então ficou na 4.^a preferência das listas 2 e 3, e na 3.^a preferência da lista 1, porque é a única forma de somar apenas 1400 pontos:

$$2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$$

Relativamente à pontuação do jogador S, sabemos que não ficou na primeira preferência da lista e, porque assim teria mais pontos que o jogador S: ($1 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 600 = 3400$), e como também não ficou na 4.^a preferência (jogador Q) nem na 3.^a (jogador S), então a sua preferência é a 2.^a.

Assim o jogador R deve ocupar a 1.^a preferência da lista 3, por ser o único jogador e a única preferência ainda não determinados. Desta forma a ordenação dos jogadores na lista 3, é:

	1. ^a Preferência	2. ^a Preferência	3. ^a Preferência	4. ^a Preferência
Jogador	R	S	P	Q

3. De acordo com as capacidades indicadas na tabela, e como a comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores, podemos observar que não serão inspecionados os estádios da Austrália e da França.

Assim, não considerando linhas e colunas relativas à Austrália e França na tabela relativa às durações dos voos e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura, onde as arestas representam os voos e os vértices a localização dos estádios:

I - Aresta Espanha-Inglaterra - duração 1h55 (menor tempo de voo)

II - Aresta Espanha-África do Sul - duração 10h25

III - Aresta Inglaterra- Coreia do Norte - duração 11h16

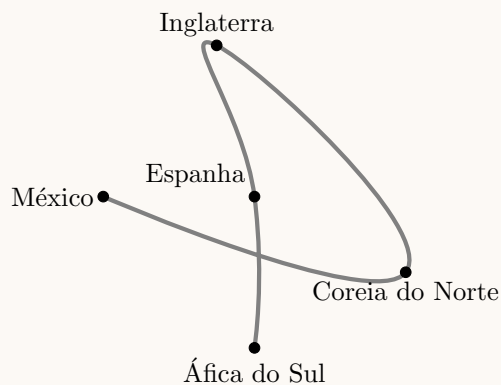
(não se considera a aresta México-Inglaterra, porque já selecionamos uma aresta com Inglaterra)

(não se considera a aresta África do Sul-Inglaterra, porque já selecionamos arestas com estes países)

(não se considera a aresta África do Coreia do Norte-Espanha, porque já selecionamos arestas com estes países)

(não se considera a aresta África do Coreia do Espanha-México, porque já selecionamos duas arestas com Espanha)

IV - Aresta Coreia do Norte-México - duração 15h25



Desta forma, o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul, é:

África do Sul → Espanha → Inglaterra → Coreia do Norte → México



4. De acordo com as condições do empréstimo, a atleta terá que pagar o valor financiado acrescido de 16%, ou seja, um valor total de

$$1200 + 1200 \times 0,16 = 1200 \times 1,16 = 1392 \text{ €}$$

Como o prazo de pagamento é de dois anos (24 meses) e as prestações são constantes, o valor de cada prestação mensal é:

$$\frac{1392}{24} = 58 \text{ €}$$

5.

5.1. Analisando todas os cenários possíveis temos:

- 3 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $3 \times 18 = 54$ pontos e não 58 como indicado.
- 2 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $2 \times 18 + 25 = 61$, pontos se na prova restante tivesse ficado em primeiro lugar, ou $2 \times 18 + 15 = 51$ pontos se na prova restante tivesse ficado em terceiro lugar, em qualquer outra posição na prova restante teria ainda menos pontos e nunca os 58 indicados.
- 1 vez: esta situação pode ter ocorrido visto que teria que ter ocupado um primeiro lugar, visto que com um segundo e dois terceiros a pontuação seria $18 + 2 \times 15 = 48$ pontos. Considerando um primeiro e um segundo, a pontuação obtida é $18 + 25 = 43$ pontos e assim para a prova restante a pontuação necessária seria $58 - 43 = 15$ correspondente a um terceiro lugar.

Como se pretende identificar o número máximo de vezes que o piloto pode ter ficado em segundo lugar, a resposta é 1, correspondendo a 1 primeiro lugar, 1 segundo lugar e um terceiro lugar.

Resposta: **Opção B**

5.2.

- 5.2.1. Pela observação do gráfico, e sabendo que a pontuação no Reino Unido foi de 18 pontos, podemos determinar a pontuação dos quatro últimos GP, adicionando a diferença para os GP que se realizaram depois deste:

GP	Varição	Pontos
Reino Unido	6	18
Itália	-8	$18 - 8 = 10$
França	0	$10 + 0 = 10$
Japão	15	$10 + 15 = 25$

Assim, o número médio de pontos obtidos por este piloto nos quatro últimos GP, é:

$$\bar{x} = \frac{18 + 10 + 10 + 25}{4} = 15,75$$



5.2.2. Como o piloto obteve o primeiro lugar no GP da Austrália, onde se percorreram todas as voltas previstas obteve 25 pontos.

Como no GP de Espanha a variação foi de -21 , a pontuação obtida foi de $25 - 21 = 4$ pontos.

Como este GP tem um total de 66 voltas, das quais só se realizaram 45, a percentagem p de voltas concluídas é:

$$\frac{66}{100} = \frac{45}{p} \Leftrightarrow p = \frac{45 \times 100}{66} \Rightarrow p \approx 68,18 \%$$

Ou seja, no GP de Espanhanão se cumpriram pelo menos 70% das voltas previstas, pelo que os 4 pontos obtidos pelo piloto correspondem a metade dos pontos previstos na tabela para a sua posição, ou seja 8 pontos, a que corresponde a 6.^a posição.

6.

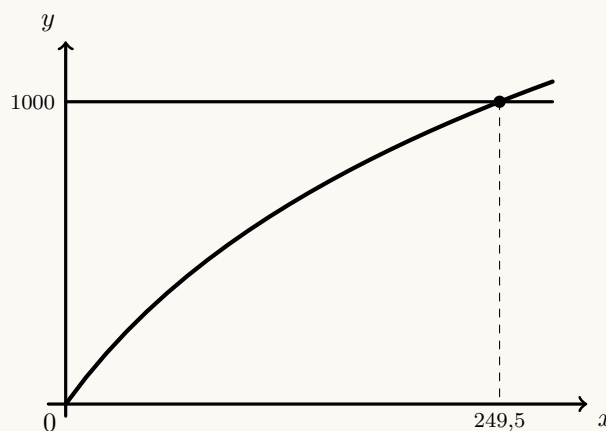
6.1. De acordo com o modelo apresentado, podemos calcular as distâncias percorridas, respetivamente em 5 segundos e em 10 segundos após o início da prova:

- $D(5) = -3680 + 1840 \log(5 + 100) \approx 38,98831$
- $D(10) = -3680 + 1840 \log(10 + 100) \approx 76,16254$

Assim temos que a distância percorrida nos primeiros 5 segundos foi, aproximadamente 38,99 metros e nos 5 segundos seguintes foi de $76,16254 - 38,98831 \approx 37,17$ metros. Assim, no segundo período de 5 segundos percorreu uma distância inferior no mesmo espaço de tempo, pelo que a afirmação do atleta é correta.

6.2. Como a prova tem 1000 metros, o tempo, em segundos, que o atleta demorou a fazer a prova é a abcissa do ponto de interseção do gráfico da função que modela a distância percorrida pelo atleta com a reta de equação $y = 1000$.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = -3680 + 1840 \log(x + 100)$ e a reta $y = 1000$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às décimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(249,5; 1000)$.



Assim, temos que o atleta demorou 249,5 segundos a completar a prova, e como o recorde mundial é de $3 \times 60 + 15 = 195$ segundos, a diferença, em segundos, arredondado às décimas, entre o tempo alcançado pelo atleta e o recorde mundial é:

$$249,5 - 195 = 54,5 \text{ segundos}$$



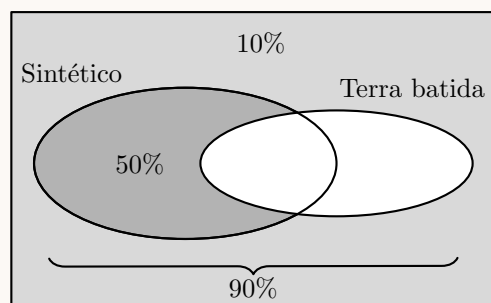
7.

- 7.1. Como 90% dos adversários do Alexandre venceram torneios disputados em piso sintético ou em piso de terra batida, a percentagem de adversários que nunca venceram é:

$$100 - 90 = 10\%$$

Como 60% nunca venceram torneios disputados em piso de terra batida, e destes 10% nunca venceram qualquer torneio, a percentagem dos que venceram em piso sintético, sem terem vencido em terra batida, é:

$$60 - 10 = 50\%$$



Resposta: **Opção C**

- 7.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em o Alexandre começar uma partida, e os acontecimentos:

$S1$: «Conseguir um primeiro serviço bem-sucedido»

Pt : «Conseguir pontuar»

Temos, de acordo com os dados do gráfico, que: $P(S1) = 0,7$, $P(Pt|S1) = 0,8$ e $P(\overline{S1} \cap \overline{Pt}) = 0,12$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\overline{S1}) = 1 - P(S1) = 1 - 0,7 = 0,3$
- $P(\overline{S1} \cap Pt) = P(\overline{S1}) - P(\overline{S1} \cap \overline{Pt}) = 0,3 - 0,12 = 0,18$
- $P(S1 \cap Pt) = P(Pt|S1) \times P(S1) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$

	$S1$	$\overline{S1}$	
Pt	0,56	0,18	0,74
\overline{Pt}		0,12	
	0,7	0,3	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de tendo colocado uma bola em jogo, o Alexandre pontuar, é:

$$P(Pt) = P(S1 \cap Pt) + P(\overline{S1} \cap Pt) = 0,56 + 0,18 = 0,74$$

- 7.3. Como o Alexandre vai tentar defender dois serviços dos seus adversários, a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço pode ser calculada como a soma das probabilidades de defender apenas o primeiro, defender apenas o segundo ou não defender qualquer serviço.

Como a probabilidade de defender um serviço é 0,6, a a probabilidade de não defender um serviço é $1 - 0,6 = 0,4$, pelo que a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço dos seus adversários, é:

$$\underbrace{0,6 \times 0,4}_{\text{defender apenas o 1.º}} + \underbrace{0,4 \times 0,6}_{\text{defender apenas o 2.º}} + \underbrace{0,4 \times 0,4}_{\text{não defender nenhum}} = 0,64$$



8. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 225$
- A proporção amostral de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo: $\hat{p} = \frac{81}{225} = 0,36$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2,576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para estimar a proporção de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo $\left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0,36 - 2,576\sqrt{\frac{0,36(1-0,36)}{225}}; 0,36 + 2,576\sqrt{\frac{0,36(1-0,36)}{225}} \right[\approx]0,28; 0,44[$$

