Exame nacional de Matemática A **(2006, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x		-6		-1		1	
(x^2-1)	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
(x^2+5)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+6)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cup$	Pt. Inf.	$\cap$	Pt. Inf.	$\cup$

Pelo que podemos concluir que a função f tem **dois pontos de inflexão**.

Resposta: **Opção B**

2. Para estudar a continuidade da função g no ponto de abcissa zero, temos que comparar os valores de $g(0)$, de $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ e de $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

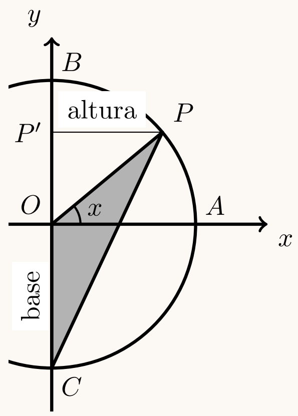
- $g(0)=2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2\times 0^+ +1}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1}{2x} = \dfrac{e^{0^-}-1}{2\times 0^-} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\times\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

Como $g(0)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então a função g é descontínua à direita de zero e como $g(0)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, então a função g também é descontínua à esquerda de zero.

Resposta: **Opção D**

3. Considerando o lado $[OC]$ como a base do triângulo ($\overline{OC} = 1$), a altura será o segmento que contém o ponto P e a sua projeção ortogonal (P') sobre a reta OC.



Como $\overline{OP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{PP'}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP'} = \cos x$$

Assim a área do triângulo $[OPC]$ é:

$$A_{[OPC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{PP'}}{2} = \frac{1 \times \cos x}{2} = \frac{\cos x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

4. Como o comprimento da aresta da base, em centímetros é x, a área da base, em centímetros quadrados é $x \times x = x^2$
Como a altura do prisma, em centímetros, é y, o volume do prisma, em centímetros cúbicos é $x^2 \times y$

Assim, considerando o volume do prisma igual a 64 cm^3, temos que:

$$x^2 \times y = 64 \Leftrightarrow y = \frac{64}{x^2}$$

Desta forma temos que se $x = 8$, então $y = \frac{64}{8^2} = \frac{64}{64} = 1$, pelo que o ponto de coordenadas (8,8) não pertence ao gráfico da função, e desta forma podemos rejeitar os gráficos das opções (B) e (D).
Temos ainda que, como o volume é constante, se a área da base aumentar indefinidamente, o comprimento da altura deve aproximar-se de zero, ou seja:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{64}{x^2} = \frac{64}{+\infty} = 0$$

E assim, podemos rejeitar o gráfico da opção (C).

Resposta: **Opção A**

5. O algarismo dos milhares dos números naturais compreendidos entre 1 000 e 3 000 só pode ser 1 ou 2, pelo que existem 2 hipóteses para o algarismo das unidades.
Como os algarismos devem ser todos diferentes, devem ser escolhidos 3 algarismos de entre os 9 que são diferentes do selecionado para o algarismo dos milhares, ou seja, ${}^9A_3$ escolhas diferentes, visto ser relevante a ordenação destes 3 algarismos, por gerarem números diferentes.
Assim, a quantidade de números naturais, escritos com algarismos todos diferentes, compreendidos entre os números 1 000 e 3 000 é:

$$2 \times {}^9A_3 = 1008$$

Resposta: **Opção D**

6. Pela fórmula do binómio de Newton, sabemos que todos os termos do desenvolvimento de $(x+2)^5$ são da forma:

$${}^5C_k(x)^{5-k}(2)^k \ , \ \ k \in \{0,1,...,5\}$$

O termo do desenvolvimento do binómio, obtido para $k=2$, é:

$${}^5C_2(x)^{5-2}(2)^2 = 10 \times x^3 \times 2^2 = 10 \times 4 \times x^3 = 40x^3$$

Ou seja, é um monómio da forma kx^3, com $k=40$.

Resposta: **Opção C**

7. Designando por w, z_1 e z_2 os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos C, A e B, respetivamente, temos que:

- $|w| = |z_1|$, porque os pontos A e C estão à mesma distância da origem, pelo que:

$$|w| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

- Como $18° = 18 \times \frac{\pi}{180} rad = 18 \times \frac{\pi}{18 \times 10} rad = \frac{\pi}{10} rad$, então:

$$\arg(w) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$$

Assim temos que $w = 5\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{5}$

Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Resolvendo a equação temos:

$$iz^3 - \sqrt{3} - i = 0 \;\Leftrightarrow\; iz^3 = \sqrt{3} + i \;\Leftrightarrow\; z^3 = \frac{\sqrt{3}}{i} + \frac{i}{i} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; z^3 = \frac{i\sqrt{3}}{i^2} + 1 \;\Leftrightarrow\; z^3 = -i\sqrt{3} + 1 \;\Leftrightarrow\; z^3 = 1 - \sqrt{3}i$$

Escrevendo $1 - \sqrt{3}i$ na f.t. $(z^3 = \rho \operatorname{cis} \theta)$ temos:

- $\rho = |z^3| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

Assim $z^3 = 2 \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, e por isso, usando a fórmula de Moivre, temos:

$\sqrt[3]{2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\dfrac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0,1,2\}$, ou seja, temos 3 raízes de índice 3:

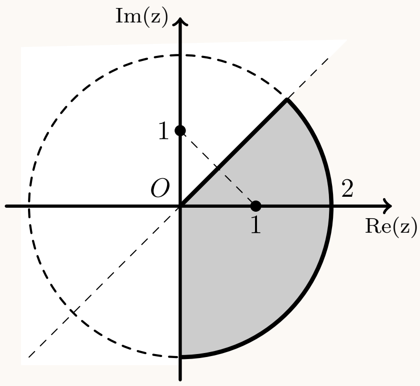
- $k = 0 \rightarrow w_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$
- $k = 1 \rightarrow w_2 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{6\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{9}$
- $k = 2 \rightarrow w_3 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{12\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \dfrac{11\pi}{9}$

Logo w_3 é a única solução da equação que pertence ao terceiro quadrante, porque $\pi < \dfrac{11\pi}{9} < \dfrac{3\pi}{2}$, ou seja $\pi < \arg(w_2) < \dfrac{3\pi}{2}$.
Logo, a solução da equação que pertence ao 3º quadrante, escrita na fórmula trigonométrica é:

$$w_3 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{9}$$

1.2. Na figura ao lado está representado, a sombreado, a região B, que é a interseção de três condições:

- $|z| \leq 2$, o interior da circunferência centrada na origem e raio 2
- $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, o semiplano à direita do eixo imaginário, ou o conjunto dos pontos com a parte real não nula
- $|z - 1| \leq |z - i|$, o semiplano limitado superiormente pela bissetriz dos quadrantes ímpares



A região B pode ser decomposta num quarto do círculo de raio 2 e num setor circular que corresponde a metade de um quarto de círculo, pois é delimitada pela bissetriz dos quadrantes ímpares.

Assim, a área pode ser calculada como:

$$A = \frac{A_\circ}{4} + \frac{\frac{A_\circ}{4}}{2} = \frac{A_\circ}{4} + \frac{A_\circ}{8} = \frac{2 \times A_\circ}{8} + \frac{A_\circ}{8} = \frac{3 \times A_\circ}{8} = \frac{3 \times \pi \times 2^2}{8} = \frac{3 \times 4 \times \pi}{8} = \frac{12\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$$

2.

2.1.

2.1.1. Como a função é contínua no intervalo $]0{,}1[$ e também no intervalo $[1,+\infty[$, as retas de equação $x=1$ e $x=0$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f.
Podemos ainda observar que, como a função está definida para $x=1$, temos que $f(1)$ é um valor finito, e assim, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, pelo que, se a reta $x=1$ é uma assíntota do gráfico de f, então o comportamento assintótico só está presente quando $x \to 1^-$, pelo que, para averiguar estas hipóteses vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{0^+}{\ln\left(0^+\right)} = \dfrac{0^+}{-\infty} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln(1^-)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

E assim concluímos que a reta de equação $x=0$ não é assíntota do gráfico de f, mas a reta $x=1$ é.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y = mx+b$, quando $x\to+\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2-x} = e^{2-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{2-x} - 0\times x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\times e^2}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = e^2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = e^2 \times \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = e^2 \times \frac{1}{+\infty} = e^2\times 0 = 0$$

Desta forma concluímos que a reta de equação $y = 0x+0$, ou seja a reta definida por $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f e como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ podemos concluir que esta é a única assíntota não vertical do gráfico de f

2.1.2. Calculando o valor de $f(e^{-1})$, como $e^{-1} < 1$, vem:

$$f(e^{-1}) = \frac{e^{-1}}{\ln\left(e^{-1}\right)} = \frac{e^{-1}}{-1\times \ln e} = \frac{e^{-1}}{-1\times 1} = \frac{e^{-1}}{-1} = -e^{-1}$$

E assim, vem que

$$f(x) + f(e^{-1}) = 0 \Leftrightarrow f(x) + \left(-e^{-1}\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{-1}$$

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[1,+\infty[$, é contínua neste intervalo, e também em $[4{,}5]$, porque $[4{,}5] \subset [1,+\infty[$

Como $e^{-1} \approx 0{,}37$, $\dfrac{4}{e^2} \approx$, então, $\dfrac{5}{e^3} < e^{-1} < \dfrac{4}{e^2}$, ou seja, $f(5) < 0 < f(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]4{,}5[$ tal que $f(c) = e^{-1}$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $f(x) = e^{-1}$ no intervalo $]4{,}5[$, ou seja:

$$\exists x \in]4{,}5[: \ f(x) + f(e^{-1}) = 0$$

C.A.

$$f(4) = 4e^{2-4} = 4e^{-2} =$$
$$= \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$$

$$f(5) = 5e^{2-5} = 5e^{-3} =$$
$$= \frac{5}{e^3} \approx 0{,}25$$

2.1.3. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x \in]0,1[$:

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)'\ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{1 \times \ln x - x\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,1[$, temos:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge \ln^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x = e \wedge x \neq 1$$

Como $x \in]0,1[$ e $e > 1$, concluímos que $f'(x)$ não tem qualquer zero neste intervalo.
Assim, como no intervalo $]0,1[$, $\ln(x) < 0$ temos que $\ln x - 1 < 0$, e como $\ln^2(x) > 0$ (no mesmo intervalo), temos que:

$$f'(x) < 0, \ \forall x \in]0,1[$$

pelo que a função f é estritamente decrescente neste intervalo.

2.2. Determinado a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(xe^{2-x}\right)' = (x)'e^{2-x} + x\left(e^{2-x}\right)' = e^{2-x} + x(2-x)'e^{2-x} = e^{2-x} + x(-1)e^{2-x} = e^{2-x} - xe^{2-x} = e^{2-x}(1-x)$$

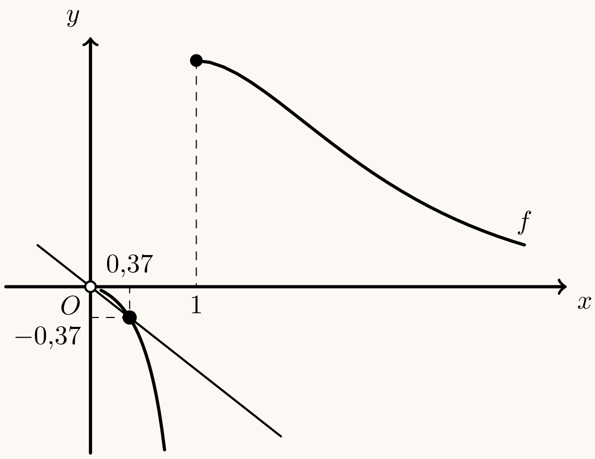
O declive da reta r pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = e^{2-2}(1-2) = e^0(-1) = -1$$

Como a reta s é paralela à reta r, e tem a ordenada na origem igual a zero, a equação da reta s é: $y = -x$

Traçando a reta s e o gráfico da função f numa janela compatível com o domínio da função e que permita visualizar o ponto de interseção obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de um ponto de interseção dos gráficos de duas funções, encontramos as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas $(0{,}37, -0{,}37)$



3.

3.1. Como o período de uma função trigonométrica pode ser calculado como a diferença das abcissas de dois maximizantes consecutivos, começamos por determinar a derivada da função:

$$f'(x) = \big(A + B\cos(Cx)\big)' = (A)' + B\big(\cos(Cx)\big)' = 0 + B(Cx)'(-\operatorname{sen}(Cx)) = -BC\operatorname{sen}(Cx)$$

Calculando os zeros da derivada temos:

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -BC\operatorname{sen}(Cx) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{sen}(Cx) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad Cx = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{k\pi}{C}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como todos os zeros de f' estão associados a uma mudança de sinal, para cada valor de k verificamos a existência de um maximizante, ou de um minimizante.
Como os maximizantes e os minimizantes ocorrem alternadamente, se um valor de k gera um maximizante, $k+1$ gera um minimizante e $k+2$ gera outro maximizante.
Logo, para k e $k+2$ temos dois maximizantes (ou minimizantes) consecutivos, pelo que o período da função pode ser calculado como:

$$\frac{(k+2)\pi}{C} - \frac{k\pi}{C} = \frac{(k+2)\pi - k\pi}{C} = \frac{k\pi + 2\pi - k\pi}{C} = \frac{2\pi}{C}$$

3.2. Como o período da função é a diferença entre dois maximizantes consecutivos, e a distância do ancoradouro ao fundo do rio ocorre a cada maré alta, o período desta função é $12 - 0 = 12$.
Por outro lado, como o período desta função é $\frac{2\pi}{C}$ temos que:

$$\frac{2\pi}{C} = 12 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\pi}{12} = C \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{6} = C$$

Assim temos que a função a função é do tipo $f(x) = A + B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times x\right)$
Como a distância ao fundo do rio era máxima às zero horas, e a distância máxima foi de 17 metros, temos que

$$f(0) = 17 \quad\Leftrightarrow\quad A+B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0\right) = 17 \quad\Leftrightarrow\quad A+B\cos(0) = 17 \quad\Leftrightarrow\quad A+B\times 1 = 17 \quad\Leftrightarrow\quad A+B = 17$$

Por outro lado, como a distância era mínima às 6 horas, e o mínimo da função é 11, temos:

$$f(6) = 11 \quad\Leftrightarrow\quad A+B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) = 11 \quad\Leftrightarrow\quad A+B\cos(\pi) = 11 \quad\Leftrightarrow\quad A+B\times(-1) = 11 \quad\Leftrightarrow\quad A-B = 11$$

Logo, temos que

$$\begin{cases} A + B = 17 \\ A - B = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 + B + B = 17 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 17 - 11 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{6}{2} \\ A = 11 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = 14 \end{cases}$$

Pelo que, os valores dos parâmetros adequados ao modelo são $A = 14$, $B = 3$ e $C = \frac{\pi}{6}$

4.

4.1. Como se pretende que $P(A \cap B) = P(A)$, então $A \cap B = A$, ou seja $A \subset B$

No âmbito da experiência descrita, podemos definir os acontecimentos, nem impossíveis nem certos, tais que $A \neq B$ e $P(A \cap B) = P(A)$:

- A: O produto dos dois números saídos é 48
- B: O produto dos dois números saídos é um número par

4.2. Como o dado cúbico tem 6 faces e o dado octaédrico tem 8 faces, podemos fazer $6 \times 8 = 48$ pares de faces, equiprováveis, usando uma face de cada dado.

Destas 48, apenas 4 correspondem a pares com soma 5:

Dado cúbico	1	2	3	4
Dado octaédrico	4	3	2	1
Soma	5	5	5	5

Assim,

$$P(X = 5) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

4.3. No contexto da situação descrita, $P(C|D)$ é a probabilidade de saírem números cujo produto é 16, sabendo que são números iguais.
Analogamente, $P(D|C)$ é a probabilidade de saírem números iguais, sabendo que o produto desses números é 16.

Para determinar $P(C|D)$, temos que o número de casos possíveis é 6, porque como um dos dados está numerado de 1 a 6 (e também existem estes números no outro dado), existem 6 pares de números iguais. Destes apenas 1 resulta num produto 16, o que acontece quando ambos os números são quatro ($4 \times 4 = 16$), e assim, recorrendo à Regra de Laplace temos que

$$P(D|C) = \frac{1}{6}$$

Para determinar $P(D|C)$, observamos que o número de casos possíveis é 2, porque como 16 é múltiplo de 2, 4 e 8, só é possível obter um produto igual a 16 em duas combinações ($4 \times 4 = 16$ e $2 \times 8 = 16$). Como destas duas apenas uma resulta do produto de números iguais ($4 \times 4 = 16$), recorrendo à Regra de Laplace temos que

$$P(C|D) = \frac{1}{2}$$