Exame nacional de Matemática A **(2006, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como, pela observação da figura podemos constatar que os gráficos das duas funções se intersetam num ponto de ordenada não nula, então, designando por a a abcissa do ponto de interseção, temos que $f(a) = g(a)$, e assim temos que:

   - $f(a) = g(a) \Leftrightarrow f(a) - g(a) = 0$, pelo que a equação $f(x) - g(x) = 0$ não é impossível
   - Como $a \neq 0$, então $f(a) = g(a) \Leftrightarrow \dfrac{f(a)}{g(a)} = 1$, pelo que a equação $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ não é impossível

   Como $f(0) = 2$ e $g(0) = 0{,}5$, então temos que $f(0) \times g(0) = 2 \times 0{,}5 = 1$, pelo que a equação $f(x) \times g(x) = 1$ não é impossível.

   Podemos ainda observar que a equação $f(x) + g(x) = 0$ é equivalente a $f(x) = -g(x)$ e como ambas as funções são positivas, não existe qualquer valor de x para os qual as funções tomem valores simétricos, ou seja a equação $f(x) + g(x) = 0$ é impossível.

   Resposta: **Opção A**

2. Observando que:

$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$$

   Temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + 5}{2 + \cos x} = \frac{e^0 + 5}{2 + \cos(0)} = \frac{1+5}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

   Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} = \frac{\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)}{2} = \frac{\frac{x}{2}\ln(e)}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times 1}{2} = \frac{x}{4}$$

   Resposta: **Opção C**

4. De acordo com os dados, temos que:

   - $f''(0) = 0$, porque no ponto de abcissa 0, o gráfico de f inverte o sentido das concavidades, ou seja é um ponto de inflexão
   - $f'(0) = 1$, a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo tem declive 1
   - $f(0) = 2$, porque a reta tangente tem declive 1 e contém o ponto $(-2{,}0)$, logo, a ordenada na origem pode ser calculada como: $0 = 1 \times (-2) + b \;\Leftrightarrow\; 2 = b$

   Assim, $f(0) + f'(0) + f''(0) = 2 + 1 + 0 = 3$

   Resposta: **Opção C**

5. Como $A = A \cup B \;\vee\; A \subset (A \cup B)$, então $P(A) \leq P(A \cup B) \;\Leftrightarrow\; P(A \cup B) \geq P(A) \;\Leftrightarrow\; P(A \cup B) \geq 0{,}3$

   Como $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ e $\overline{A} = \overline{A} \cup B \;\vee\; \overline{A} \subset \left(\overline{A} \cup B\right)$, então:

   $$P\left(\overline{A}\right) \leq \left(\overline{A} \cup B\right) \;\Leftrightarrow\; P\left(\overline{A} \cup B\right) \geq P\left(\overline{A}\right) \;\Leftrightarrow\; P\left(\overline{A} \cup B\right) \geq 0{,}7$$

   Como $A \cap B = A \;\vee\; (A \cap B) \subset A$, então $P(A \cap B) \leq P(A) \;\Leftrightarrow\; P(A \cap B) \leq 0{,}3$

   Como $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$ e $P(A \cap B) \leq 0{,}3$, vem que $P\left(\overline{A \cap B}\right) > 1 - 0{,}3 \;\Leftrightarrow\; P\left(\overline{A \cap B}\right) > 0{,}7$

   Assim temos que o único acontecimento que pode ter probabilidade inferior a 0,3 é o acontecimento $A \cap B$

   Resposta: **Opção C**

6. Como a soma das probabilidades é 1, vem:

   $$\frac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}} + \frac{a}{{}^{2006}C_{100}} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}} + \frac{a}{{}^{2006}C_{100}} = \frac{{}^{2006}C_{100}}{{}^{2006}C_{100}} \;\Leftrightarrow\; {}^{2005}C_{99} + a = {}^{2006}C_{100}$$

   Visualizando estes elementos nas linhas 2005 e 2006 do triângulo de Pascal, temos:

   $$\begin{array}{ccccccccccccc} & {}^{2005}C_0 & & {}^{2005}C_1 & & \ldots & \ldots & \ldots & & {}^{2005}C_{99} & & {}^{2005}C_{100} & \ldots \\ {}^{2006}C_0 & & {}^{2006}C_1 & & \ldots & \ldots & \ldots & & {}^{2006}C_{99} & & {}^{2006}C_{100} & & \ldots \end{array}$$

   Pelo que podemos afirmar que: ${}^{2005}C_{99} + {}^{2005}C_{100} = {}^{2006}C_{100}$, ou seja, como ${}^{2005}C_{99} + a = {}^{2006}C_{100}$,

   $$a = {}^{2005}C_{100}$$

   Resposta: **Opção B**

7. Sendo A a imagem geométrica de um número complexo $w = \rho \operatorname{cis} \theta$, temos que w é uma raiz quadrada de z se $z = w^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$.

   Se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então $\pi < 2\theta < 2\pi$ e das quatro hipóteses de resposta, apenas o número complexo $-i = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ satisfaz esta condição.

   Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por usar a fórmula de Moivre para calcular $\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 1^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\pi = -1$

Substituindo na expressão dada temos:

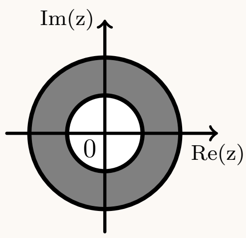
$$\frac{4+2i\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i} = \frac{4+2i(-1)}{3+i} = \frac{4-2i}{3+i} = \frac{(4-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{12-4i-6i+2i^2}{9-i^2} = \frac{12-2-10i}{9-(-1)} =$$
$$= \frac{10-10i}{10} = 1-i$$

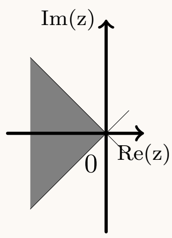
Escrevendo $1-i$ na f.t. temos $1-i = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

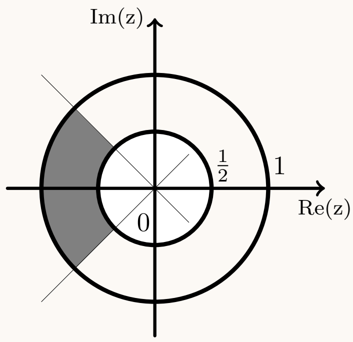
Logo $1-i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

1.2. A condição $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$ define a coroa circular delimitada pelas circunferências centradas na origem e de raios $\frac{1}{2}$ e $|z| < 1$; e a condição $\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$ define a região do plano complexo, dos 2º e 3º quadrantes compreendido entre as bissetrizes dos quadrantes, como nas figuras ao lado.





A condição $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \ \wedge\ \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$, é a interseção das duas regiões definidas, pelo que a sua representação geométrica é a zona representada a sombreado na figura ao lado.



A área da coroa circular pode ser calculada como a diferença das áreas dos dois círculos:

- Área do círculo de raio 1: $A = \pi \times 1^2 = \pi$
- Área do círculo de raio $\frac{1}{2}$: $A = \pi \times \left(\frac{1}{1}\right)^2 = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$
- Área da coroa circular $A = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Como as bissetrizes dos quadrantes dividem a coroa circular em quatro partes iguais, a área da região defina pela condição é

$$A = \frac{\frac{3\pi}{4}}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

2.

2.1. Como a coluna tem seis faces laterais, como as faces opostas devem ser pintadas da mesma cor, a escolha da cor para 3 faces determina que as restantes 3 tenham as mesmas cores.
Como uma dessas 3 faces já está pintada de verde, faces adjacentes não podem ter a mesma cor, restam 3 faces (a base superior e 2 das faces laterais) que podem ser pintadas com 1 das 5 cores disponíveis (não considerando para esta escolha a cor verde).
Assim existem 5 elementos (cores) que podem ser arranjados em 3 posições(a base superior e duas faces laterais adjacentes não pintadas de verde), pelo que o número de maneiras diferentes que podem ficar pintadas as restantes cinco faces, de cordo com as condições impostas é:

$$^{5}A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

2.2. Como uma das bases está contida no plano de equação $z = 2$, os pares de vértices que definem retas paralelas ao eixo Oz são pares de pontos que definem arestas laterais do prisma.
Como o prisma tem 12 vértices, existem $^{12}C_2$ pares de vértices que podem ser selecionados, ou seja $^{12}C_2$ casos favoráveis.
Como existem 6 arestas laterais, são 6 pares de vértices que definem retas paralelas ao eixo Oz, ou seja 6 casos favoráveis.
Assim, recorrendo à Regra de LaPlace para o cálculo da probabilidade, e tornando a fração irredutível, temos que:

$$\frac{6}{^{12}C_2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

3. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ é a probabilidade de que a segunda bola extraída da caixa seja branca, sabendo que a primeira bola extraída é preta.
Como $P(B|A) = \frac{1}{2}$, então no momento da extração da segunda bola, o número de bolas pretas e brancas, dentro da caixa é igual.
Como é sabido que a primeira bola extraída é preta, no momento da extração da segunda bola, ainda estão as 10 bolas brancas na caixa.
Assim, como no momento da extração da segunda bola, existem 10 bolas brancas e o mesmo número de bolas pretas, e já tinha sido extraída uma bola preta, sem ter sido reposta, o número de bolas pretas que estão inicialmente na caixa é $10 + 1 = 11$

4.

4.1. Como o triângulo $[OPQ]$ é isósceles, então a abcissa do Q é o dobro da abcissa do ponto P, pelo que a abcissa do ponto Q é $2x$
Como o ponto P pertence ao gráfico de f, então a ordenada de P é $f(x) = e^{-x}$
Considerando o lado $[OQ]$ como a base do triângulo, temos que a área do triângulo $[OPQ]$ é:

$$A(x) = \frac{2x \times e^{-x}}{2} = xe^{-x}$$

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = (x)'e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = 1 \times e^{-x} + x(-x)'e^{-x} = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}(1-x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x}>0} \;\vee\; 1 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	0		1	$+\infty$
A'	n.d.	$+$	0	$-$
A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função A:

- é crescente no intervalo $]0,1]$;
- é decrescente no intervalo $[1,+\infty[$;

Como a função A é crescente no intervalo $]0,1]$ e decrescente no intervalo $[1,+\infty[$, podemos concluir que a função só tem um extremo, e 1 é o maximizante.
Calculando o valor máximo que a área do triângulo pode assumir, temos:

$$A(1) = 1 \times e^{-1} = 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

5. Como a função f é contínua, então a função $g(x) = xf(x)$ também é contínua, por se tratar de um produto de funções contínuas, pelo que o gráfico de g não admite qualquer assíntota vertical.

Como a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$, temos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

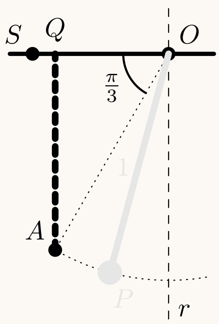
E assim vem que:

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Como nem $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}$, nem $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ são valores finitos podemos concluir que também não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de g.

6.

6.1. No instante inicial ($t = 0$) a amplitude do ângulo SOP é dada por:



$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8} \times 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Assim, considerando o ponto Q, como a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta OS, temos que a amplitude do ângulo QOA é $\frac{\pi}{3}$ radianos, e a distância do centro da esfera à reta OS é $\overline{QA}$. Logo:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{1} \;\Leftrightarrow\; \overline{QA} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; \overline{QA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

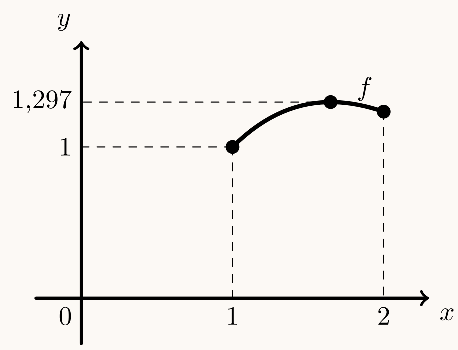
6.2. Quando o ponto P passa na reta r temos $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Logo valor de t que corresponde ao instante em que o ponto P passa na reta r, pela primeira vez, é a menor solução positiva da equação $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$.
Resolvendo a equação vem:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9{,}8}\,t = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sqrt{9{,}8}}\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a menor solução positiva da equação corresponde a $k = 0$, ou seja, $t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{9{,}8}} \approx 0{,}5$
Ou seja, o ponto P passa na reta r, pela primeira vez, aproximadamente, meio segundo depois do instante inicial.

7. Representando na calculadora a função f, no domínio definido, visualizamos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados do máximo da função num intervalo, obtemos o valor arredondando às milésimas, para o máximo da função de 1,297.

Por observação do gráfico, e como
$f(1) = \cos(1-1) + \ln 1 = \cos(0) + 0 = 1$, podemos afirmar que o contradomínio de f é, aproximadamente, $[1; 1{,}297]$
Ou seja a amplitude do contradomínio é $1{,}297 - 1 = 0{,}297$

Como se pretende fazer uma transformação da função f, por forma a dar origem a uma função de contradomínio de amplitude 1 (o intervalo $[4{,}5]$ tem amplitude 1), o parâmetro a deve ser tal que: $a \times 0{,}297 = 1$.
Assim podemos calcular o valor de a:

$$a \times 0{,}297 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{0{,}297} \Leftrightarrow a \approx 3{,}367$$

Logo, como $f(1) = 1$, $a \times f(1) = 3{,}367 \times 1 = 3{,}367$, e como se pretende que o valor mínimo da função g (que é a imagem de 1) seja, 4, podemos calcular o valor de b:

$$b = 4 - 3{,}367 = 0{,}633$$

Ou seja, arredondando às centésimas os valores calculados de a e de b, temos que a função
$g(x) = 0{,}37f(x) + 0{,}63$ tem contradomínio $[4{,}5]$, aproximadamente.