Exame nacional de Matemática A **(2006, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como o ponto (0,2) pertence ao gráfico de f, temos que $f(0) = 2$, e assim vem que:

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow a^0 + b = 2 \Leftrightarrow 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 1 \Leftrightarrow b = 1$$

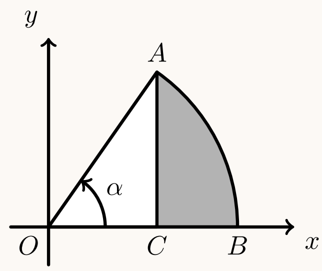
Como o ponto (1,3) pertence ao gráfico de f, temos que $f(1) = 3$, e como $b = 1$ vem que:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow a^1 + b = 3 \Leftrightarrow a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 3 - 1 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: **Opção A**

2. Como o arco BA é um arco de uma circunferência de raio 1, e com amplitude α, tem de comprimento α.

Como $\overline{OA} = 1$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{1} \Leftrightarrow \overline{OC} = \cos\alpha$$

Logo, $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow 1 = \cos\alpha + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 1 - \cos\alpha$

Assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P = \alpha + \overline{AC} + \overline{CB} = \alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha = 1 + \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$$

Resposta: **Opção D**

3. Pela observação dos gráficos, podemos verificar que:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = k, \ \ k \in]2, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

E assim, temos que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)} = \frac{k}{-\infty} = 0$$

Resposta: **Opção A**

4. Por observação do gráfico, temos que:
   - $h(0) < 0$, porque a imagem de zero é negativa
   - $h'(0) > 0$, porque em $x = 0$ a função é crescente
   - $h''(0) < 0$, porque em $x = 0$ a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo

   Logo, podemos afirmar que:
   - $h(0) + h''(0) < 0$; $h(0) - h'(0) < 0$ e $h'(0) \times h''(0) < 0$
   - $h'(0) - h''(0) > 0$

   Resposta: **Opção C**

5. Como a soma das probabilidades é 1, vem:

$$a + a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 2a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 2a = 1 - 0{,}4 \Leftrightarrow 2a = 0{,}6 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}6}{2} \Leftrightarrow a = 0{,}3$$

   Logo, o valor médio da variável aleatória é:

$$\mu = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 = 0 + 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1$$

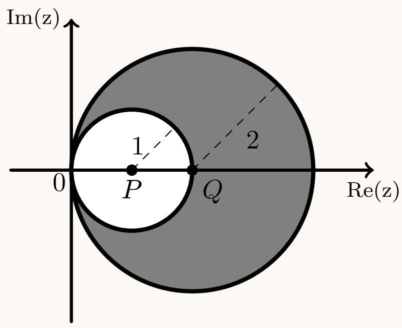
   Resposta: **Opção A**

6. Como ficam dois rapazes de pé, calculamos quantos grupos de rapazes podem ficar de pé, selecionando 2 de entre os 4 rapazes, sem considerar relevante a ordem ${}^4C_2$
   Depois, por cada grupo de rapazes que fica de pé, calculamos o número de formas diferentes de ocupar 6 posições (lugares), com 6 elementos (4 raparigas e 2 rapazes que vão sentados), onde a ordem é considerada relevante, por gerarem configurações diferentes na ocupação dos lugares sentados, ou seja ${}^6A_6 = P_6 = 6!$
   Assim, supondo que ficam dois rapazes em pé, o número de maneiras diferentes que podem ficar ocupados os 6 lugares disponíveis é

$${}^4C_2 \times 6! = 4\,320$$

   Resposta: **Opção D**

7. Designando por P e Q as representações geométricas dos números complexos $w_1 = 1$ e $w_2 = 2$, respetivamente, temos que a região sombreada é o conjunto dos pontos do plano complexo que satisfazem cumulativamente duas condições:
   - estão a uma distância superior a 1 do ponto P
   - estão a uma distância inferior a 2 do ponto Q



   Assim temos que a região sombreada é definida por

$$|z - 1| \geq 1 \;\wedge\; |z - 2| \leq 2$$

   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Como $\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = i$ temos que:

$$z_1 = (2-i)\left(2+\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right) = (2-i)(2+i) = 2^2 - i^2 = 4-(-1) = 5$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = 5 = 5\operatorname{cis} 0$

Fazendo a divisão na f.t. vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\operatorname{cis} 0}{\frac{1}{5}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{5}}\operatorname{cis}\left(0-\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = 25\operatorname{cis}\frac{\pi}{7}$$

1.2. Como o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6, logo cada lado tem comprimento 2.

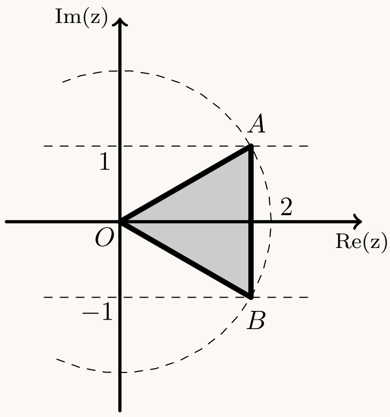
Assim A e B devem estar sobre a circunferência de centro na origem e raio 2, para que $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$ (o que significa que $|z| = |\overline{z}| = 2$).

Como B é simétrico de A relativamente ao eixo real (porque $\overline{z}$ é o conjugado de z) e $\overline{AB} = 2$, sabemos que A está sobre a reta $\operatorname{Im}(w) = 1$ e B sobre a reta $\operatorname{Im}(w) = -1$

Como $\operatorname{Im}(z) = 1$ e $\operatorname{Re}(z) > 0$, sabemos que z é da forma $z = a + i, a \in \mathbb{R}^+$

Por outro lado, temos que $|z| = |a+i| = \sqrt{a^2+1^2} = \sqrt{a^2+1}$, e como $|z| = 2$, temos que:
$\sqrt{a^2+1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{a^2+1}\right)^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad a^2+1 = 4$

Como $a > 0$, temos que $a^2+1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{3}$, logo $z = \sqrt{3} + i$



2.

2.1. Como a função é contínua no intervalo $]1, +\infty[$, a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x + x\ln(x-1)\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(x\big(1+\ln(x-1)\big)\right) = 1\big(1+\ln(1^+-1)\big) =$$

$$= 1 + \ln(0^+) = 1 - \infty = -\infty$$

Assim concluímos que a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x + x\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x} + \frac{x\ln(x-1)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\big(1+\ln(x-1)\big) =$$

$$= 1 + \ln(+\infty - 1) = 1 + \ln(+\infty) = 1 + \infty = +\infty$$

Logo, como o domínio de f é $]1, +\infty[$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de f não tem assíntotas oblíquas.

2.2. Como o ponto Q pertence ao gráfico de f e tem abcissa 2, podemos calcular a respetiva ordenada:

$$f(2) = 2 + 2\ln(2-1) = 2 + 2\ln 1 = 2 + 2 \times 0 = 2$$

A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto $Q(2,2)$, contém este ponto e tem declive $m = f'(2)$. Assim determinando a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \big(x + x\ln(x-1)\big)' = (x)' + (x)'\ln(x-1) + x\big(\ln(x-1)\big)' =$$

$$= 1 + 1 \times \ln(x-1) + x \times \frac{(x-1)'}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + x \times \frac{1}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

Assim, calculando o valor do declive, vem:

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} = 1 + \ln 1 + \frac{2}{1} = 1 + 0 + 2 = 3$$

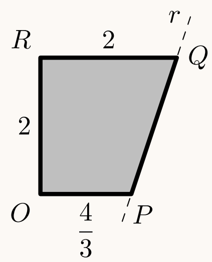
Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de b:

$$2 = 3(2) + b \;\Leftrightarrow\; 2 = 6 + b \;\Leftrightarrow\; 2 - 4 = b \;\Leftrightarrow\; -4 = b$$

Pelo que a equação da reta r é: $y = 3x - 4$

Assim, a abcissa do ponto P pode ser calculada através da equação da reta r:

$$y = 3x - 4 \wedge y = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 3x - 4 \;\Leftrightarrow\; 4 = 3x \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{3} = x$$



Logo a área do trapézio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{x_Q + x_P}{2} \times y_R = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} \times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

3.

3.1. Como o *periélio* é o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol, é nesse ponto que a distância é mínima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude zero radianos, logo a distância mínima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(0) = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos 0) = 149{,}6(1 - 0{,}0167 \times 1) \approx 147{,}1$$

Analogamente, o ponto da órbita da Terra oposto ao *periélio* será o mais afastado do Sol, e é nesse ponto que a distância é máxima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude π radianos, logo a distância máxima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(\pi) = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos\pi) = 149{,}6\big(1 - 0{,}0167 \times (-1)\big) \approx 152{,}1$$

3.2.

3.2.1. Se $x = \pi$, da relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\,\mathrm{sen}\,x$ resulta:

$$\frac{2\pi t}{T} = \pi - 0{,}0167\,\mathrm{sen}\,\pi \;\Leftrightarrow\; \frac{2\pi t}{T} = \pi - 0{,}0167 \times 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\pi t}{T} = \pi \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\pi \times T}{2\pi} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{T}{2}$$

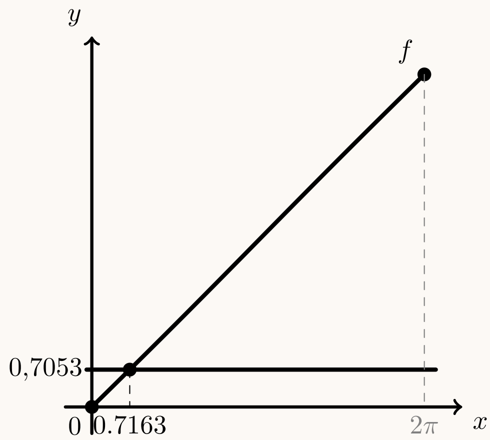
No contexto da situação descrita, quando o ângulo x tem uma amplitude de π radianos, o tempo (t) que decorreu da passagem da Terra pelo *periélio* é metade do tempo (T) que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

3.2.2. Como t é o número de dias decorridos após o dia 4 de janeiro (dia da passagem da Terra pelo periélio), o dia 14 de fevereiro, corresponde a $t = 31 + 14 - 4 = 41$.

Como $T = 364{,}24$, temos a amplitude do ângulo x pode ser calculada como:

$$\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \frac{2\pi \times 41}{365{,}24} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 0{,}7053 = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$$

Para resolver a equação anterior, representamos na calculadora gráfica a reta definida por $y = 0{,}7053$ e o gráfico da função $f(x) = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$, numa janela compatível com o domínio da função ($[0,2\pi[$). O gráfico visualizado está reproduzido na figura ao lado.



Recorrendo à funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor, com quatro casas decimais, de $x \approx 0{,}7163$ para a solução da equação $0{,}7053 = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$.

Após determinar a amplitude do ângulo correspondente à posição da Terra no dia 14 de fevereiro, resta calcular a distância ao Sol, arredondado o resultado às décimas:

$$d \approx 149{,}6(1 - 0{,}0167 \cos(0{,}7163)) \approx 147{,}1$$

Logo, no dia 14 de fevereiro, a Terra encontra-se a uma distância aproximada de 147,1 milhões de quilómetros do Sol.

4. Como f é uma função contínua em $[0,2]$, então a função g (definida nos termos da sugestão) também é contínua em $[0,1]$ porque resulta de operações entre funções contínuas, neste intervalo.

Calculando $g(0)$, vem

$$g(0) = f(0) - f(0+1) = f(0) - f(1) = 0 - f(1) = -f(1)$$

e como $f(1) > 0$, então $-f(1) < 0$, ou seja, $g(0) < 0$

Calculando $g(1)$, vem

$$g(1) = f(1) - f(1+1) = f(1) - f(2) = f(1) - 0 = f(1)$$

e como $f(1) > 0$, então $g(1) > 0$

Logo, como $g(0) < 0 < g(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0,1[$ tal que $g(c) = 0$, e assim vem que,

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - f(c+1) = 0 \Leftrightarrow f(c) = f(c+1)$$

5.

5.1. Recorrendo à Regra de LaPlace para determinar a probabilidade, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar com 2 alunos escolhidos de entre os 23, como a ordem é irrelevante, corresponde a ${}^{23}C_2$

Para determinar o número de casos favoráveis, ou seja, o número de pares de alunos em que a soma das idades dos dois alunos seja 12, calculamos a soma do número de grupos relativos a duas situações distintas

- escolhemos 2 alunos de entre os 10 que têm 6 anos, sem considerar relevante a ordenação ($6+6=12$), ou seja ${}^{10}C_2$
- escolhemos um alunos de entre os 4 que têm cinco anos e outro de entre os 9 que têm sete anos ($5+7=12$), ou seja 4×9

Assim, calculando a probabilidade de serem escolhidos dois alunos em que a soma das suas idades é 12, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$\frac{{}^{10}C_2 + {}^4C_1 \times {}^9C_1}{{}^{23}C_2} = \frac{{}^{10}C_2 + 4 \times 9}{{}^{23}C_2} = \frac{81}{253}$$

5.2. Como $P(B|A)$ é a probabilidade de, ao selecionar um aluno ao acaso, escolher um rapaz, sabendo que o aluno tem 7 anos, existem 9 casos possíveis, que correspondem ao total de alunos com 7 anos ($2+7=9$).
Como se pretende que o aluno seja um rapaz, o número de casos favoráveis é 2, que corresponde ao número de rapazes com 7 anos.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace temos que $P(B|A) = \frac{2}{9}$

6. Relativamente à Opção 1, como todos os alunos da turma têm 16 ou 17 anos ou mais do que 17 anos, vem que $X \cup Y = \Omega$, pelo que $P(X \cup Y) = 1$, e assim a afirmação $P(X \cap Y) < 1$ é falsa.

Relativamente à Opção 2, temos que os alunos da turma cuja idade é par ou um múltiplo de 4, são exatamente os mesmos cuja idade é par, pelo que $X \cup Y = X$, e assim a afirmação $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa.

Relativamente à Opção 3, como não existem raparigas de 18 anos na turma, vem que $X \cap Y = \emptyset$, pelo que $P(X \cap Y) = 0$, e assim a afirmação $P(X \cap Y) > 0$ é falsa.

Temos assim que, relativamente à Opção 4, as três afirmações são verdadeiras.