Exame nacional de Matemática A **(2007, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^+} 1}{\lim\limits_{x\to 2^+} (4-x^2)} = \frac{1}{4-(2^+)^2} = \frac{1}{4-4^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

   Resposta: **Opção D**

2. Resolvendo a inequação temos que:

$$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

   Como $\sqrt[3]{e} \approx 1{,}4$, temos que, de entre as opções apresentadas, o único valor possível para x é 2

   Resposta: **Opção D**

3. Por observação do gráfico, e como o eixo Ox é assíntota do gráfico de f, temos que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^+$

   Pelo que:

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln\left(f(x)\right) = \lim_{x\to -\infty} \ln\left(0^+\right) = -\infty \ \ (1)$$

   Da mesma forma, como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f, e pela observação do gráfico, podemos constatar que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1^+$

   E assim:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(f(x)\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(1^+\right) = 0^+ \ \ (2)$$

   Podemos ainda observar que $f(0) = k, k > 1$, pelo que:

$$g(0) = ln\left(f(0)\right) = \ln k$$

   E como $k > 1$, então $\ln(k) > 0 \ \Leftrightarrow g(0) > 1 \ \ (3)$

   Assim, podemos observar que:

   - A função representada pelo gráfico da opção (A) não satisfaz a condição (1)
   - A função representada pelo gráfico da opção (B) não satisfaz a condição (3)
   - A função representada pelo gráfico da opção (D) não satisfaz a condição (2) nem a condição (3)

   Resposta: **Opção C**

4. Como 3 é um zero da função f, então temos que $f(3) = 0$

   Assim, observando que $4 - 1 = 3$, vem que:

   $$g(4) = f(4-1) + 4 = f(3) + 4 = 0 + 4 = 4$$

   Ou seja, o ponto de coordenadas (4,4) pertence ao gráfico da função g

   Resposta: **Opção B**

5. Como um paralelepípedo retângulo tem 8 vértices, existem ${}^8C_2$ escolhas possíveis para o par de vértices (considerando a ordenação dos vértices irrelevante).
   Logo, como o paralelepípedo retângulo tem 12 arestas, os casos favoráveis são 12, pelo que, pela Regra de Laplace, a probabilidade de que escolher dois vértices que sejam extremos de uma aresta é $\frac{12}{{}^8C_2}$

   Resposta: **Opção A**

6. Como a extração é feita sem reposição, no final da terceira extração restam 2 bolas no saco.
   Como sabemos que as primeiras 3 extrações formaram a sucessão de letras TIM, existem apenas duas hipóteses para formar a sucessão das 5 letras: TIMOR e TIMRO, uma vez, que depois de extraída a quarta bola, não existe nenhuma incerteza relativamente à última.
   Assim, a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extração, estava formada a sucessão de letras TIM é $\frac{1}{2}$

   Resposta: **Opção C**

7. Sabemos que as representações geométricas de duas raízes quadradas de um mesmo número complexo, são os extremos de um diâmetro de uma circunferência centrada na origem, ou seja, os argumentos dessas raízes diferem de π radianos.

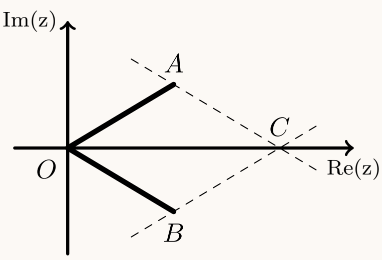
   Nas opções A, B e C a diferença dos argumentos é de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Na opção D as representações geométricas dos dois números complexos estão sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, a igual distância do centro.

   Resposta: **Opção D**

GRUPO II

1.

   1.1. Como $[AOBC]$ é um paralelogramo temos que C é a imagem geométrica da soma dos complexos que têm como imagens geométricas os pontos A e B, ou seja, $w = z + \overline{z}$

   Como $z = \text{cis}\,\alpha = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$,
   temos que $\overline{z} = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$

   Assim $w = z + \overline{z} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$

1.2. Como $z = \text{cis}\,\alpha$, pela fórmula de Moivre para a potenciação, $z^3 = 1^3\,\text{cis}\,(3\times\alpha) = \text{cis}\,(3\alpha)$
Como $i = \text{cis}\,\frac{\pi}{2}$, fazendo a divisão na f.t. temos:
$\frac{z^3}{i} = \frac{\text{cis}\,(3\alpha)}{\text{cis}\,\frac{\pi}{2}} = \text{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$
E $\frac{z^3}{i}$ é um número real se $\text{Im}\left(\frac{z^3}{i}\right) = 0$, pelo que, $\text{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\text{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - \frac{\pi}{2} = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
Como se pretende que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, atribuindo o valor zero a k temos $\alpha = \frac{\pi}{6}$

2.

2.1. Temos que A e B são acontecimentos independentes se se verificar a condição:

$$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

Assim, sabemos que existem $9 \times 9 \times 9 = 9^3$ algarismos diferentes que se podem formar com os nove algarismos.
Calculando a probabilidade dos acontecimentos A, B e $A \cap B$ temos:

- Apenas os números cujo algarismo das unidades é 5 são múltiplos de 5, pelo que existem $9 \times 9 \times 1 = 9^2$ números diferentes que são múltiplos de 5, e assim vem que $P(A) = \frac{9^2}{9^3} = \frac{1}{9}$
- Existem $9 \times 8 \times 7$ números cujos algarismos são todos diferentes, pelo que $P(B) = \frac{9 \times 8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{9^2}$
- Os números que são múltiplos de cinco e cujos algarismos são todos diferentes são $8 \times 7 \times 1 = 56$, pelo que $P(A \cap B) = \frac{56}{9^3}$

Desta forma, como:

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{56}{9^2} = \frac{56}{9^3} = P(A \cap B)$$

podemos afirmar que A e B são acontecimentos independentes.

2.2. Para que o produto de três números seja ímpar, nenhum dos três pode ser par, visto que o produto de qualquer número por um número par, resulta num produto par.
Se, à totalidade de números de 3 algarismos diferentes (formados com os 9 algarismos apresentados), subtrairmos aqueles que são formados exclusivamente por números ímpares, vamos obter a quantidade de números que têm pelo menos um algarismos ímpar na sua composição.
Existem ${}^9A_3$ números de 3 algarismos diferentes formados com os 9 algarismos apresentados (consideramos a ordem relevante, porque a troca de posições para os mesmos algarismos geram números diferentes).
Aos ${}^9A_3$ números vamos subtrair aqueles que são formados exclusivamente por números ímpares, ou seja, ${}^5A_3$, que corresponde a escolher 3 dos 5 algarismos ímpares (1, 3, 5, 7 e 9), considerando a ordem relevante porque as trocas de posição para os mesmos algarismos geram números diferentes.
Assim, a quantidade de números de 3 algarismos, cujo produto dos seus algarismos é um número par é:

$${}^9A_3 -{}^5 A_3$$

3. Como temos que:

$$(A \cup B) \cap C = \emptyset \;\Leftrightarrow\; (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A \cap C = \emptyset \;\wedge\; B \cap C = \emptyset$$

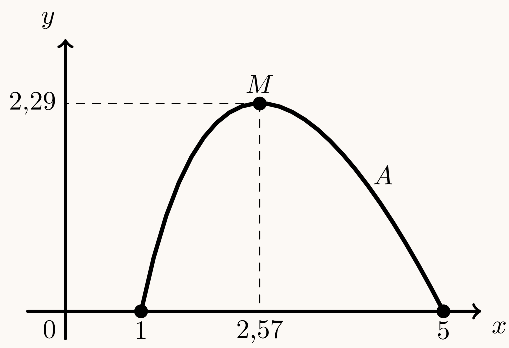
Logo, como $A \cap C = \emptyset$, então $P(A \cap C) = 0$, pelo que:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}21 + 0{,}47 - 0 = 0{,}68$$

4. Como o ponto P tem de coordenadas $P(x, \ln x)$, podemos considerar a medida da base do retângulo, $b = 5 - x$ e a altura $a = \ln x$, assim temos:

$$A = b \times a = (5 - x)\ln x \;,\; x \in [1{,}5]$$

Representando a função que dá a área do retângulo em função de x, na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Depois, usando a função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de ordenada máxima, obtemos valores, arredondados às décimas, do ponto $M(2{,}57; 2{,}29)$ (também representado na figura).

Assim, quando o ponto P tem abcissa $x \approx 2{,}57$, a área do retângulo $A \approx 2{,}29$ é máxima.

5.

5.1. Como a função h resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como $-0{,}63 < 0 < 1{,}77$, ou seja, $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(a) = 0$, ou seja, que a função h tem, pelo menos, um zero em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

C.A.

$$f'(x) = \left(e^{x-1}\right)' = (x-1)'e^{x-1} = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$$

$$g'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$h(0) = f'(0) - g'(0) = e^{0-1} - \cos(0) = \\ = e^{-1} - 1 \approx -0.63$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}-1} + \cos\frac{\pi}{2} = \\ = e^{\frac{\pi}{2}-1} + 0 \approx 1{,}77$$

5.2. Como ficou provado no item anterior, existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(a) = 0$, logo

$$h(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(a) - g'(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(a) = g'(a)$$

Ou seja, existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as derivadas de f e g nos pontos de abcissa a são iguais, ou seja, os declives das retas tangentes aos gráficos das funções f e g nos pontos de abcissa a são iguais, o que significa que essas retas são paralelas.

6.

6.1. Calculando a intensidade da luz solar à superfície da água, ou seja a zero metros de profundidade temos:

$$I(0) = ae^{-b\times 0} = ae^0 = a \times 1 = a$$

Como a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água, temos que $I(20) = \frac{I(0)}{2}$

Resolvendo a equação, e apresentando o resultado arredondado às centésimas, vem que:

$$I(20) = \frac{I(0)}{2} \Leftrightarrow ae^{-b\times 20} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow e^{-20b} = \frac{a}{2a} \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} e^{-20b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -20b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-20} \Rightarrow b \approx 0{,}03$$

6.2. Para estudar a monotonia da função começamos por determinar a expressão da função derivada:

$$I'(x) = \left(10e^{-0{,}05x}\right)' = 10\left(e^{-0{,}05x}\right)' = 10(-0{,}05x)'e^{-0{,}05x} = 10 \times (-0{,}05)e^{-0{,}05x} = -0{,}5e^{-0{,}05x}$$

Como $e^{-0{,}05} > 0$, para qualquer valor de x, então $-0{,}05 \times e^{-0{,}05} < 0$, ou seja $I'(x) < 0$, pelo que podemos concluir que a função é estritamente decrescente no seu domínio.

Relativamente à existência de assíntotas do gráfico de I, como a função está definida para $x \geq 0$ e é contínua (porque resulta de operações entre funções continuas no domínio da função), só podem existir assíntotas quando $x \to +\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota horizontal temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(10e^{-0{,}05x}\right) = 10e^{-0{,}05\times(+\infty)} = 10e^{-\infty} = 10 \times 0^+ = 0$$

E assim podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de I e não existem outras assíntotas.

Assim, a função ser estritamente decrescente, no contexto da situação descrita, significa que a um aumento do número de metros abaixo da superfície corresponde sempre uma diminuição da intensidade da luz solar, ou seja, a intensidade da luz diminuí com um aumento da profundidade.

A reta de equação $y = 0$ ser assíntota do gráfico de I, significa no contexto da situação descrita, que a intensidade da luz solar tende para zero com um aumento arbitrariamente grande da profundidade.