# Exame nacional de Matemática A **(2007, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

## GRUPO I

1. Como a área do retângulo é igual a 5, designado por $x$ o comprimento de um dos lados e por $y$ o comprimento de um lado adjacente, temos que:

$$x \times y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{x}$$

Assim o perímetro do retângulo é:

$$x + \frac{5}{x} + x + \frac{5}{x} = 2x + 2 \times \frac{5}{x} = 2x + \frac{10}{x}$$

Resposta: **Opção A**

2. Determinando a expressão da derivada e igualando a zero, temos:

$$f'(x) = (3 - 2\cos x)' = (3)' - (2\cos x)' = 0 - 2(-\operatorname{sen} x) = 2\operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\operatorname{sen} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi \,,\; k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0,2\pi]$ as três soluções são $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Estudando a variação do sinal de $f'$ para relacionar com a monotonia de $f$, no intervalo $[0,2\pi]$, vem:

| $x$ | 0 | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | 0 | + | 0 | − | 0 |
| $f$ | min | ↗ | Máx | ↘ | min |

Logo, o valor $x$ de para o qual $f(x)$ é máximo, é $\pi$

Resposta: **Opção C**

3. Pela observação do gráfico podemos verificar que $\lim_{x\to 3^-} f(x) < 0$ e que $\lim_{x\to 3^+} f(x) > 0$, pelo que podemos garantir que $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{f(x)} < 0$ e que $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{f(x)} > 0$
   Assim temos que:
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{f(x)}$$
   Ou seja, que não existe $\lim_{x\to 3} \frac{1}{f(x)}$

   Resposta: **Opção D**

4. Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função $g$, e pela observação do gráfico, temos que: $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ e que $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$
   Como a função $h$ é definida por $h(x) = x - 1$, temos que $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$

   Logo:

   - $\lim_{x\to 1^-} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1^-} h(x)}{\lim_{x\to 1^-} g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$
   - $\lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1^+} h(x)}{\lim_{x\to 1^+} g(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$

   E assim, como os limites laterais são iguais, temos que: $\lim_{x\to 1} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

   Resposta: **Opção C**

5. Podemos considerar que um dos cientistas escolheu um dos hotéis. Para que os dois cientistas escolham o mesmo hotel, o segundo cientista deverá escolher o mesmo hotel.
   Como existem 7 hotéis na cidade (número de casos possíveis) e apenas um foi escolhido pelo primeiro cientista (número de casos favoráveis) recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade do segundo cientista escolher, ao acaso, o mesmo hotel do primeiro cientista é $\frac{1}{7}$

   Resposta: **Opção A**

6. Quando se lançam dois dados numerados de 1 a 6, existem apenas 3 hipóteses de obter uma soma igual a 4 $(3+1,\ 1+3$ e $2+2)$.
   Assim, para calcular a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados, sabendo que a soma dos números saídos foi quatro, consideramos 3 casos possíveis e apenas 1 favorável $(2+2)$, pelo que, a probabilidade é $\frac{1}{3}$

   Resposta: **Opção C**

7. Sabemos que $i^0 = 1$ , $i^1 = i$ , $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^p = i^k$, onde $k$ é o resto da divisão inteira de $p$ por 4.

   Assim, como $i^n = -i$, temos que $i^n = -i = i^3 = i^{4\times p+3}$, para $p \in \mathbb{N}$.

   Logo $i^{n+1} = i^{(4\times p+3)+1} = i^{4\times p+4} = i^{4\times(p+1)} = i^{4\times(p+1)+0} = i^0 = 1$

   Resposta: **Opção A**

## GRUPO II

1.

   1.1. Como $\arg(z_1) = \alpha$, temos que $z_1 = \rho \operatorname{cis} \alpha$
   Como $z_2 = 4iz_1$, temos que $-z_2 = -4iz_1$

   Como $-4i = 4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$, fazendo a multiplicação na f.t. temos que:

$$-z_2 = -4iz_1 = \left(4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}\right) \times (\rho \operatorname{cis} \alpha) = (4\rho) \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

   Assim, como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $\arg(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

   1.2. Como $z_2 = 4iz_1$, vem que:
   $z_2 = 4iz_1 = 4i(3 + yi) = 12i + 4yi^2 = 12i + 4y(-1) = -4y + 12i$

   Assim sabemos que $\operatorname{Im}(z_2) = 12$, e também que $\operatorname{Im}(z_1) = y$.
   Como $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ temos que $y = 12$, pelo que, substituindo na expressão simplificada de $z_2$ temos:

$$z_2 = -4(12) + 12i = -48 + 12i$$

2. Retirando 2 cartas do conjunto das 8 (formado pelos ases e reis), existem, na totalidade, ${}^8C_2$ conjuntos diferentes (e equiprováveis).
   Destes conjuntos, apenas $4 \times 4$ são constituídos por cartas com diferente valor (que corresponde ao agrupamento de qualquer um dos 4 ases com qualquer um dos 4 reis).
   Da mesma forma, existem ${}^8C_2$ conjuntos diferentes de 2 cartas selecionadas do grupo de damas e valetes, dos quais apenas $4 \times 4$ são constituídos por cartas de diferente valor.
   Assim, a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe, é:

$$\frac{4\times 4 \ \times \ 4\times 4}{{}^8C_2 \ \times \ {}^8C_2} = \frac{16^2}{\left({}^8C_2\right)^2} = \frac{16}{49}$$

3.

3.1. Como $X$ e $Y$ são acontecimentos independentes, temos que $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$
E a probabilidade de que $X$ não ocorra nem ocorra $Y$ pode ser escrita como $P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right)$
Assim:

| | |
|---|---|
| $P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = P\left(\overline{X \cup Y}\right)$ | Leis de De Morgan: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ |
| $= 1 - P(X \cup Y)$ | Teorema: $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$ |
| $= 1 - \Big(P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)\Big)$ | Teorema: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ |
| $= 1 - P(X) - P(Y) + P(X \cap Y)$ | |
| $= 1 - P(X) - P(Y) + P(X) \times P(Y)$ | Hipótese: $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$ |
| $= 1 - a - b + a \times b$ | Hipótese: $P(X) = a$ e $P(Y) = b$ |

Logo, $P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = 1 - a - b + a \times b \quad q.e.d.$

3.2. Definindo os acontecimentos

- $X$:≪tirar um iogurte de pêssego≫
- $Y$:≪tirar um sumo de laranja≫

Temos que $a = P(X) = \frac{1}{5}$, $b = P(Y) = \frac{1}{3}$ e admite-se que $X$ e $Y$ são independentes.

Como a probabilidade de que não ocorra $X$ nem ocorra $Y$ é igual a $1 - a - b + a \times b$, temos que a probabilidade (na forma de fração irredutível) de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssego e o sumo não ser de laranja é:

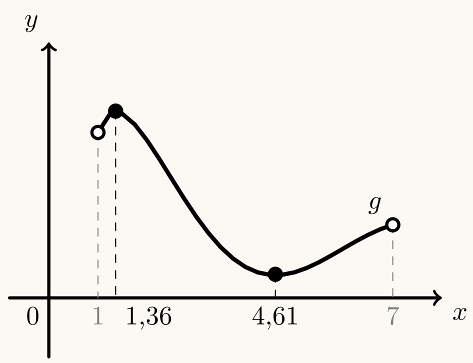
$$1 - a - b + a \times b = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{3}{15} - \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

4. Representando esta função no intervalo $]1,7[$, na calculadora gráfica, obtemos o gráfico reproduzido na figura seguinte.

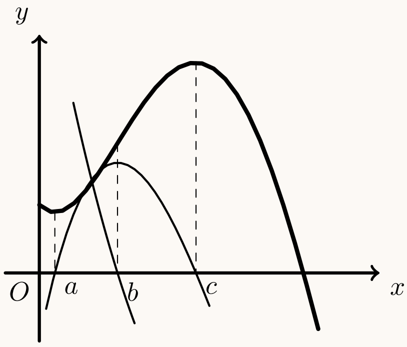
Depois, como os valores de $x$ que verificam a condição $g'(x) < 0$, ($]a,b[$) são aqueles em que a função é decrescente. Por observação do gráfico, podemos concluir que são os valores compreendidos entre o maximizante de $g$, no intervalo definido (ou seja $a$), e o minimizante da função no mesmo intervalo, ($b$).

Assim, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados de maximizantes e minimizantes da função, obtemos que os valores, aproximados às centésimas, de $a$ e de $b$:

$$a \approx 1{,}36 \text{ e } b \approx 4{,}61$$



5. O zero da função representada no gráfico da Figura 2, corresponde à abcissa do ponto de inflexão do gráfico de $h$, o que é suficiente para relacionar este gráfico com a segunda derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in ]0,b[$ a função representada no gráfico da Figura 1 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a concavidade do gráfico de $h$ está voltada para cima; e de forma análoga, quando $x \in ]b,+\infty[$, a função do gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto o gráfico da função $h$, tem a concavidade voltada para baixo. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 2 é o gráfico de *h*”**




Os zeros da função representada no gráfico Figura 3, correspondem às abcissas dos extremos de $h$, o que permite relacionar este gráfico com a primeira derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in ]a,c[$ a função representada no gráfico da Figura 3 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a função $h$ é crescente; e de forma análoga, quando $x \in ]0,a[\cup]c,+\infty[$, a função representada no gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto a função $h$ é decrescente. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 3 é o gráfico de *h*’**

6.

6.1. As abcissas dos pontos de interseção do gráfico de $f$ com o eixo $Ox$ são as soluções da equação $f(x) = 0$. Resolvendo a equação, temos que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln\left(x^2\right) \Leftrightarrow x^2 = e^1 \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

Assim, temos que as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de $f$ com o eixo $Ox$ são:

$$\left(-\sqrt{e},0\right) \text{ e } \left(\sqrt{e},0\right)$$

6.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(1 - \ln(x^2)\right)' = (1)' - \left(\ln(x^2)\right)' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{x} = 0}_{\text{Eq. Impossível}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $h$, temos:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | n.d. | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | n.d. | $\searrow$ |

Assim podemos concluir que a função $f$:

- é crescente no intervalo $]-\infty,0]$;
- é decrescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- não tem qualquer extremo.

7. Partindo da área do círculo menor temos:

$$
\begin{array}{rll|l}
a=\pi r^2 & \Leftrightarrow & A\sqrt{\cos\theta}=\pi r^2 \quad \Leftrightarrow & \text{(porque } a=A\sqrt{\cos\theta}\text{)} \\
 & \Leftrightarrow & \pi R^2\sqrt{\cos\theta}=\pi r^2 \quad \Leftrightarrow & \text{(porque } A=\pi R^2\text{)} \\
 & \Leftrightarrow & R^2\sqrt{\cos\theta}=r^2 \quad \Leftrightarrow & \text{(dividindo ambos os membros por } \pi\text{)} \\
 & \Leftrightarrow & \left(\sqrt[4]{2}r\right)^2\sqrt{\cos\theta}=r^2 \quad \Leftrightarrow & \text{(porque } R=\sqrt[4]{2}r\text{)} \\
 & \Leftrightarrow & \sqrt{2}r^2\sqrt{\cos\theta}=r^2 \quad \Leftrightarrow & \\
 & \Leftrightarrow & \sqrt{2}\times\sqrt{\cos\theta}=1 \quad \Leftrightarrow & \text{(dividindo ambos os membros por } r^2\text{)} \\
 & \Leftrightarrow & \sqrt{\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow & \text{(calculando o quadrado de ambos os membros)} \\
 & \Rightarrow & \cos\theta=\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow & \\
 & \Leftrightarrow & \cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow & \\
 & \Leftrightarrow & \theta=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} &
\end{array}
$$

Logo $\theta=\frac{\pi}{3}$, porque $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.