Exame nacional de Matemática A **(2008, 1.ª fase)**

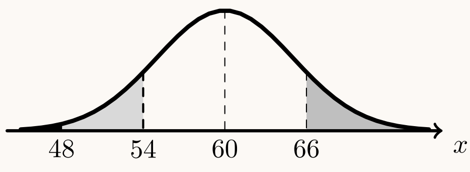
Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como se pretende ordenar 5 elementos (amigos) em 5 posições (lugares), existem ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ casos possíveis.
   Como se pretende que o João e a Maria fiquem sentados em lugares consecutivos, podemos considerar 2 formas diferentes (o João à esquerda da Maria, ou o João à direita) e, por cada uma destas duas formas, existem 4 elementos (os 3 amigos e o par João+Maria que, nesta fase, se consideram juntos) para 4 posições (sendo que uma das posições tem dois bancos), ou seja, $2 \times^4 A_4 = 2 \times P_4 = 2 \times 4!$ casos favoráveis.
   Assim, pela Regra de Laplace, a probabilidade de o João e a Maria ficarem sentados um ao lado do outro é:
   $$\frac{2 \times 4!}{5!} = \frac{2 \times 4!}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$
   Resposta: **Opção B**

2. Como
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = P(A)$$
   Vem que:
   $$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 80\% - 60\% + 10\% = 30\%$$
   Resposta: **Opção C**

3. Como a variável aleatória X segue uma distribuição normal, temos que,
   $P(X < \mu - k) = P(X > \mu + k)$, $k \in \mathbb{R}^+$, e como $\mu = 60$ e $\sigma = 5$, vem:
   - $P(X > 66) = P(X > 60 + 6) = P(X < 60 - 6) = P(X < 54)$
   - Como $48 < 54 < \mu$, temos que
     $P(X < 48) < P(X < 54)$

   Assim, como $P(A) = P(X < 54)$, e $P(B) = P(X < 48)$, temos que:
   $$P(B) < P(A)$$
   Resposta: **Opção C**

4. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:
   $$2 \log_a \left(a^{\frac{1}{3}}\right) = 2 \times \frac{1}{3} \log_a a = \frac{2}{3} \log_a a = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$
   Resposta: **Opção D**

5. Como a reta de equação $y = -x - 1$, é assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$, pela definição de assíntota, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) - (-x-1)\Big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) + x + 1\Big) = 0$$

Resposta: **Opção B**

6. Pela observação do gráfico sabemos que f' é constante, e positiva, para $x < 0$, porque a função varia num ritmo constante e é crescente, pelo que apenas as os gráficos das opções (A), (B) e (C) são coerentes com esta informação.

Como a semitangente ao gráfico de f à esquerda de 0 tem declive positivo, e a semitangente ao gráfico de f à direta de 0 tem declive negativo, ou seja,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, pelo que f' não está definida em $x = 0$; e os únicos gráficos que são compatíveis com esta informação são os das opções (C) e (D).

Resposta: **Opção C**

7. O número complexo $3i$ tem a sua representação geométrica sobre a parte positiva do eixo imaginário, pelo que define um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos com o semieixo real positivo, logo $\arg(z) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$

Resposta: **Opção B**

8. Sendo $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, vem que $\overline{z} = a - bi$.

Assim, temos que $z + \overline{z} = 2 \;\Leftrightarrow\; a + bi + a - bi = 2 \;\Leftrightarrow\; 2a = 2 \;\Leftrightarrow\; a = 1$

Ou seja, a condição $z + \overline{z} = 2$ pode ser escrita como $\operatorname{Re}(z) = 1$, e a sua representação geométrica é a reta paralela ao eixo imaginário que contém a representação geométrica do número complexo $w = 1$.

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Temos que $-z_1 = -(1-\sqrt{3}i) = -1+\sqrt{3}i$ e escrevendo $-z_1$ na f.t. temos $-z_1 = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |-z_1| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2º quadrante, logo $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

Logo $-z_1 = 2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

Vamos agora recorrer à fórmula de Moivre para determinar $(-z_1)^3$:

$(-z_1)^3 = \left(2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3\operatorname{cis}\left(3\times\dfrac{2\pi}{3}\right) = 8\operatorname{cis}(2\pi) = 8\operatorname{cis}0$

Como $(-z_1)^3 = z_2$, podemos concluir que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2

1.2. Como $i^{46} = i^{4\times 11+2} = i^2 = -1$, pelo que $z_2 = z_1.i^{46} = z_1(-1) = -z_1 = -1+\sqrt{3}i$

Como $\overline{AB} = |z_1 - z_2|$, vem que:

$$\overline{AB} = \left|1-\sqrt{3}i-(-1+\sqrt{3}i)\right| = \left|1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i\right| = \left|2-2\sqrt{3}i\right| =$$

$$= \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+4\times 3} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

2.

2.1. Como as rifas têm 3 algarismos, selecionados de um conjunto de 10, sendo relevante a ordenação e com eventuais repetições, o número de casos possíveis, ou seja, o número de rifas é ${}^{10}A'_3 = 10^3 = 1000$
Para calcular o número de rifas com um único algarismo 5, começamos por selecionar a posição do algarismo 5 (selecionando uma das 3 posições), o que permite ${}^3C_1 = 3$ hipóteses. Depois, por cada uma delas devemos selecionar uma sequência de 2 algarismos, escolhidos de entre 9 hipóteses (todos os algarismos à exceção do 5), permitindo eventuais repetições e considerando a ordem relevante, ou seja ${}^9A'_2 = 9^2$. Pelo que o número de casos favoráveis é 3×9^2.
Assim, pela Regra de LaPlace, a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo cinco, na forma de dízima, com aproximação às centésimas, é:

$$\frac{3\times 9^2}{1000} \approx 0{,}24$$

2.2. Como a Ana e o Miguel não querem fazer parte da comissão em simultâneo, uma forma de calcular o número de comissões diferentes que se podem formar é calcular o número de todas as comissões (formadas por 3 raparigas quaisquer e dois rapazes quaisquer) e subtrair o número de comissões que integram simultaneamente a Ana e o Miguel.

Como não existem diferenças entre os elementos da comissão, a ordenação dos elementos que a constituem não é relevante, e como existem 12 raparigas, e em cada comissão estão 3, o número de conjuntos de raparigas numa comissão arbitrária é ${}^{12}C_3$. Da mesma forma, como existem 10 rapazes, o número de conjuntos de 2 rapazes que podem integrar uma comissão é ${}^{10}C_2$, pelo que o número de comissões diferentes que se podem formar é ${}^{12}C_3 \times {}^{10} C_2$.
Se considerarmos o número de comissões em que estão incluídos a Ana e o Miguel, simultaneamente resulta de considerar o número de conjuntos de 2 raparigas, selecionada de entre as 11 (todas exceto a Ana), ${}^{11}C_2$; e selecionar 1 dos 9 rapazes (todos exceto o Miguel), ${}^{9}C_1 = 9$. Logo o número de comissões com estes dois colegas na sua composição é ${}^{11}C_2 \times 9$.
Assim, se subtrairmos os dois valores, obtemos o número de comissões que não são integradas pelos dois em simultâneo:

$${}^{12}C_3 \times {}^{10} C_2 - {}^{11} C_2 \times 9$$

3. Se a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, e na caixa B só existem bolas verdes e azuis, então o número de bolas azuis e verde é igual.
Como a composição inicial era de 3 bolas verdes e 4 bolas azuis, então a bola retirada da caixa A (e colocada na caixa B) tinha cor verde.

4. Como $D_f = [-\pi, +\infty[$, só pode existir uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-4x+1}\right) = e^{-4(+\infty)+1} = e^{-\infty} = 0$$

Logo verifica-se que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Como a função é contínua em $]-\pi,0[$ e em $]0,+\infty[$, por resultar de operações sucessivas entre funções contínuas, então as retas definidas por $x = -\pi$ e por $x = 0$ são as duas únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f:

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} = \frac{3\,\text{sen}\,(-\pi)}{-\pi^2} = \frac{0}{-\pi^2} = 0$$

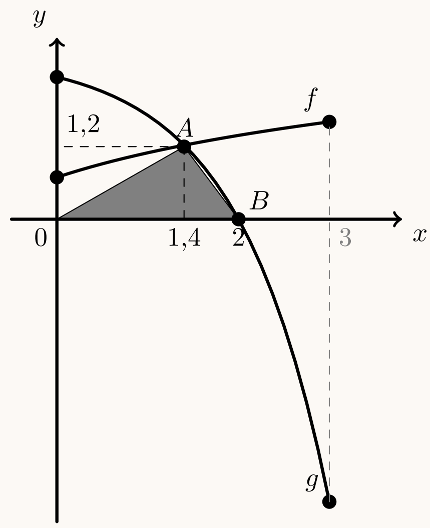
Ou seja, a reta de equação $x = -\pi$ não é uma assíntota do gráfico de f

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^-} \left(\frac{3}{x} \times \frac{\text{sen}\,(x)}{x}\right) = \lim_{x\to0^-} \frac{3}{x} \times \underbrace{\lim_{x\to0^-} \frac{\text{sen}\,(x)}{x}}_{\text{Limite Notável}} = \frac{3}{0^-} \times 1 = -\infty \times 1 = -\infty$$

Assim, a reta de equação $x = 0$, é a única assíntota vertical do gráfico de f

5. Traçando na calculadora gráfica os gráficos das restrições das funções f e g ao intervalo $[0,3]$ podemos visualizar o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Assim, as coordenadas do ponto A, também assinalado na figura ao lado, podem ser determinadas com aproximação às décimas, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, tendo sido obtidos os valores, arredondados às décimas, das coordenadas do ponto $A(1{,}4; 1{,}2)$



O valor da abcissa do ponto B, também representado na figura, pode ser determinado com recurso à função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados para os zeros de uma função. Assim, o valor, arredondado às décimas, da abcissa do ponto B é $x_B \approx 2{,}0$

Logo a área do triângulo, também desenhado na figura, pode ser calculada usando o valor da abcissa do ponto B, x_B, como medida da base e o valor da ordenada do ponto A, y_A, como o valor da altura. Assim, calculando o valor arredondado às décimas da área do triângulo, temos:

$$A_{[OAB]} = \frac{x_B \times y_A}{2} \approx \frac{2{,}0 \times 1{,}2}{2} \approx 1{,}2$$

6.

6.1. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = \big(4 - x + \ln(x+1)\big)' = (4') - (x)' + \big(\ln(x+1)\big)' = 0 - 1 + \frac{(x+1)'}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \iff -1 + \frac{1}{x+1} = 0 \iff \frac{1}{x+1} = 1 \iff 1 = x + 1 \wedge \underbrace{x+1 \neq 0}_{\text{PV, } x>-1} \iff 0 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h, temos:

x	-1		0	$+\infty$
h'	n.d.	$+$	0	$-$
h	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função h:

- é crescente no intervalo $]-1{,}0]$;
- é decrescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- tem um único extremo - um máximo (cujo maximizante é 0).

Calculando o valor do máximo, temos:

$$h(0) = 4 - 0 + \ln(0+1) = 4 + \ln 1 = 4 + 0 = 4$$

6.2. Como a função h resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]-1,+\infty[$, é contínua em $]-1,+\infty[$, e também em $[5,6]$, porque $[5,6] \subset]-1,+\infty[$

Como $-0{,}05 < 0 < 0{,}79$, ou seja, $h(6) < 0 < h(5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]5,6[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, um zero da função h no intervalo $]5,6[$

C.A.

$$h(5) = 4 - 5 + \ln(5+1) =$$

$$= -1 + \ln 6 \approx 0{,}79$$

$$h(6) = 4 - 6 + \ln(6+1) =$$

$$= -2 + \ln 7 \approx -0{,}05$$

7.

7.1. Calculando $N(0)$ temos que:

$$N(0) = \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01\times 0}} = \frac{2000}{1+199e^{0}} = \frac{2000}{1+199\times 1} = \frac{2000}{200} = 10$$

Como $N(0) = 10$, então o número de sócios da associação, zero dias após a constituição era de 10, ou seja, a associação foi constituída com 10 sócios.

Calculando $\lim\limits_{x\to+\infty} N(t)$ temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} N(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01t}} = \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01\times(+\infty)}} = \frac{2000}{1+199e^{-\infty}} = \frac{2000}{1+199\times 0^+} = 2000$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} N(t) = 2000$ então, a um aumento arbitrário do valor de t corresponde um valor de N aproximadamente de 2000, ou seja, com o passar do tempo o número de sócios da associação aproxima-se indefinidamente de 2000.

7.2. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+199e^{-0{,}01t}} = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1000} = 1+199e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow 2-1 = 199e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow \frac{1}{199} = e^{-0{,}01t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}01t = \ln\frac{1}{199} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{199}}{-0{,}01} \Rightarrow t \approx 529{,}330$$

Assim, podemos observar que ao fim de 529 dias ainda a associação ainda não contava com 1000 associados e que este número foi atingido durante o 530º dia.