Exame nacional de Matemática A **(2008, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a probabilidade do João acertar em cada tentativa é 0,8, a probabilidade do João acertar nas 4 tentativas é:

$$0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$$

Resposta: **Opção D**

2. Como na experiência aleatória descrita, foi definido que ≪*Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A*≫, para calcular a probabilidade de a bola retirada ser verde, consideramos apenas o conteúdo da caixa A (duas bolas verdes e uma bola amarela).
Assim temos que existem 2 bolas verdes (número de casos favoráveis) num total de 3 bolas (número de casos possíveis), pelo que a probabilidade é de $\frac{2}{3}$

Resposta: **Opção D**

3. A linha do triângulo de Pascal que tem 15 elementos é constituída por 15 números da forma ${}^{14}C_k$.
Como ${}^{14}C_0 ={}^{14}C_{14} = 1$, ${}^{14}C_1 ={}^{14}C_{13} = 14$ e ${}^{14}C_2 ={}^{14}C_{12} = 91$ estes são os únicos 6 elementos da linha menores que 100, porque ${}^{14}C_3 ={}^{14}C_{11} = 364$ e todos os restantes são maiores que 364.

Resposta: **Opção C**

4. Como o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função, e resolvendo a equação, podemos determinar o valor de a:

$$3 = 2^{a\times 1} - 1 \Leftrightarrow 3+1 = 2^a \Leftrightarrow 4 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 4 \Leftrightarrow a = 2$$

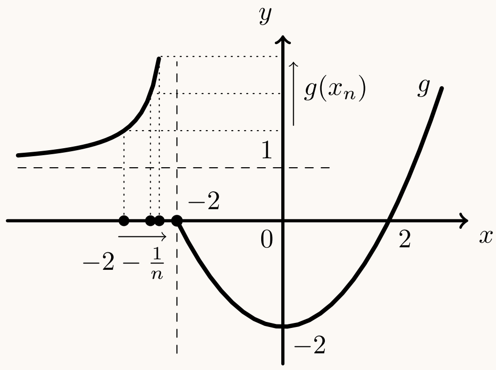
Resposta: **Opção A**

5. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$, e como, pela observação do gráfico temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = +\infty$, temos que:

$$\lim(x_n) = +\infty \text{ ou então } \lim(x_n) = -2^-$$

Assim, calculando os limites das sucessões de cada uma das hipóteses, temos:

- $\lim\left(-2+\frac{2}{n}\right) = -2+0^+ = -2^+$
- $\lim\left(-2-\frac{1}{n}\right) = -2-0^+ = -2^-$
- $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+0^+ = 1^+$
- $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1-0^+ = 1^-$



Pelo que, de entre os termos gerais de sucessões apresentados, o único em que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$ é $-2-\frac{1}{n}$

Graficamente, na figura anterior, estão representados alguns termos da sucessão $x_n = -2+\frac{1}{n}$ como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção B**

6. Como $y=-1$ é a única assíntota do gráfico da função f, e pela observação da figura, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Resposta: **Opção B**

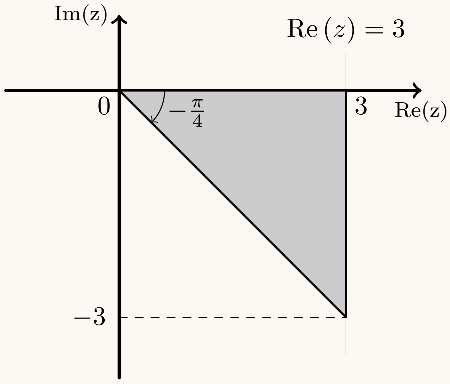
7. Os números complexos z e $-z$, têm argumentos que diferem de π radianos, logo, temos que:

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção D**

8. Os pontos representado na região a sombreado satisfazem cumulativamente duas condições:

- $\text{Re}(z) \leq 3$, ou seja, pertencem ao semiplano à direita da reta definida por $\text{Re}(z) = 3$
- $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$, ou seja, os pontos que são imagens geométricas de números complexos cujo argumento está compreendido entre $-\frac{\pi}{4}$ e 0



Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{18} = i^{4\times 2+2} = (i^2)^4 \times i^2 = (-1)^4 \times (-1) = -1$, temos que:

$$\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i} = \frac{2(1-i)-(-1)-3}{1-2i} = \frac{2-2i+1-3}{1-2i} = \frac{-2i}{1-2i} = \frac{-2i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-2i-4i^2}{1^2-(2i)^2} =$$

$$= \frac{-2i+4}{1+4} = \frac{4-2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

1.2. Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4.º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Logo $z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Como existem 4 raízes quartas de z, cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado centrado na origem, temos que as outras 3 raízes quartas de z são:

- $z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$
- $z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$
- $z_4 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$

Pelo que a raiz quarta de z cuja imagem geométrica é um ponto do 3.º quadrante é $z_3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$

2.

2.1. Temos que:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A\cup B) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cup B) && \text{Teorema: } P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right) \\ &= 1 - \Big(P(A) + P(B) - P(A\cup B)\Big) && \\ &= 1 - P(A\cap B) && \text{T.: } P(X\cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X\cup Y) \\ &= P\left(\overline{A\cap B}\right) && \text{Teorema: } P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right) \\ &= P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) && \text{Leis de De Morgan: } \overline{X\cap Y} = \overline{X}\cup\overline{Y} \end{aligned}$$

Logo, $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A\cup B)$ *q.e.d.*

2.2. Como se pretende calcular a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, para utilizar a igualdade $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A \cup B)$, podemos definir os acontecimentos

- A: O estudante escolhido ser rapaz
- B: O estudante escolhido ter tido classificação positiva

E assim, $\overline{A} \cup \overline{B}$ é o acontecimento ”o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva”.

Temos que o número de casos possíveis é $160 + 120 = 280$, correspondendo ao número total de estudantes que realizaram o exame (160 raparigas e 120 rapazes).

- O número de casos favoráveis para o acontecimento $\overline{A}$ é 160, correspondendo ao número de raparigas. E assim temos que $P\left(\overline{A}\right) = \frac{160}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento B é $160 \times 0{,}65 + 120 \times 0{,}6 = 176$, correspondendo a 65% das raparigas e 60% dos rapazes. E assim temos que $P\left(B\right) = \frac{176}{280}$
- O número de casos favoráveis para o acontecimento $A \cup B$ é $120 + 160 \times 0{,}65 = 224$, correspondendo à soma do número de rapazes com 65% das raparigas que teve positiva. E assim temos que $P\left(A \cup B\right) = \frac{224}{280}$

Logo, calculando a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, e apresentando o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas, vem

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A \cup B) = \frac{160}{280} - \frac{176}{280} + \frac{224}{280} = \frac{208}{280} \approx 0{,}74$$

3. Como as fichas têm os números 1 e 2, só existem três somas possíveis:

- soma 2: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 1 (${}^3C_2$ conjuntos possíveis).
- soma 3: se as duas fichas selecionadas tiverem números diferentes (${}^3C_1 \times {}^4C_1$ conjuntos possíveis).
- soma 4: se as duas fichas selecionadas tiverem o número 2 (${}^4C_2$ conjuntos possíveis).

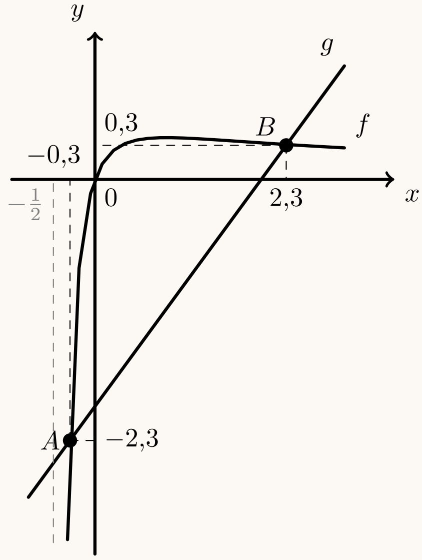
Logo, como existem ${}^7C_2$ conjuntos diferentes de fichas, podemos calcular os valores da probabilidade associada à ocorrência de cada soma:

- $P(X = 2) = \frac{{}^3C_2}{{}^7C_2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$
- $P(X = 3) = \frac{{}^3C_1 \times {}^4C_1}{{}^7C_2} = \frac{3 \times 4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
- $P(X = 4) = \frac{{}^4C_2}{{}^7C_2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

E assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

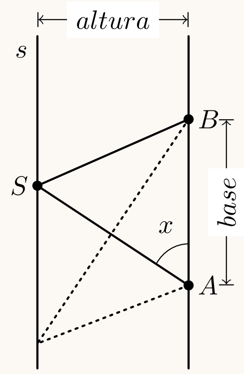
4. Traçando na calculadora gráfica os gráficos das funções f e g numa janela compatível com o intervalo $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ podemos visualizar o gráfico reproduzido na figura seguinte.
Assim, as abcissas dos pontos A e B, também assinalados na figura ao lado, podem ser determinadas com aproximação às décimas, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos.
As coordenadas, aproximadas às décimas, são $A(-0{,}3;-2{,}3)$ e $B(2{,}3;0{,}3)$.



Pela observação do gráfico podemos observar que os pontos do gráfico de f têm ordenada maior que os pontos do gráfico de g, quando as respetivas abcissas estão compreendidos entre as abcissas dos pontos A e B, pelo que a solução da inequação $f(x)>g(x)$, no intervalo $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, é o conjunto $]-0{,}3;2{,}3[$; logo os números inteiros que pertencem a este intervalo, ou seja as soluções inteiras de inequação são:

$$x_1=0\,,\;\; x_2=1 \text{ e } x_3=2$$

5. Considerando $[AB]$ como a base do triângulo, como os pontos A e B são fixos, temos que a base do triângulo é constante.
A altura do triângulo, relativa à base $[AB]$, á a distância entre as retas, que como são paralelas também é constante.
Assim, temos que $a(x)$, ou seja a área do triângulo $[ABS]$ é constante, pelo que o **Gráfico 3** não pode representar a função a



Como o ponto S se desloca sobre a reta S, existem localizações do ponto S, para as quais o ângulo BAS, ou seja, o ângulo x é superior a um ângulo reto, ou seja, a $\frac{\pi}{2}$ radianos, pelo que o gráfico **Gráfico 1** também não representa a função a, visto que neste gráfico a função está definida apenas para valores de x menores que $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Como as retas s e AB são estritamente paralelas, não existem localizações do ponto S sobre a reta s, tais que o ângulo x tenha amplitude de π radianos (ou zero radianos), pelo que o gráfico **Gráfico 4** também não representa a função a, visto que neste gráfico a função está definida para valores de x iguais a zero e a π radianos.

6.

6.1. Determinando a massa inicial da amostra da substância radioativa, ou seja a massa ao fim de zero horas ($t = 0$), vem que:

$$M(0) = 15 \times e^{-0{,}02\times 0} = 15 \times e^0 = 15 \times 1 = 15$$

Assim, equacionado o problema e resolvendo a equação vem:

$$M(t) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 15 \times e^{-0{,}02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0{,}02t} = \frac{15}{2\times 15} \Leftrightarrow e^{-0{,}02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}02t = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}02} \Rightarrow t \approx 34{,}657$$

Assim temos que o tempo corresponde a 34,657 horas, aproximadamente. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,657 horas para minutos, vem

$$0{,}657 \times 60 = 39{,}420 \approx 39 \text{ min}$$

Pelo que se concluí ao fim de 34 horas e 39 minutos a massa inicial da amostra da substância radioativa se reduz a metade.

6.2. Como a função M resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $\mathbb{R}^+$, e também, em $[2{,}5;4]$, porque $[2{,}5;4] \subset \mathbb{R}^+$

Como $13{,}847 < 14 < 14{,}268$, ou seja, como $M(4) < 14 < M(2{,}5)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in\ ]2{,}5;4[$ tal que $M(t_0) = 14$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

C.A.

Observando que 2 horas e 30 minutos corresponde a 2,5 horas, temos que:

$M(2{,}5) = 15 \times e^{-0{,}02\times 2{,}5} \approx 14{,}268$

$M(4) = 15 \times e^{-0{,}02\times 4} \approx 13{,}847$

7.

7.1. Recorrendo à definição de derivada da função no ponto de abcissa 0, vem:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2+\operatorname{sen}(4x) - \big(2+\operatorname{sen}(4\times 0)\big)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2+\operatorname{sen}(4x)-2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\times\operatorname{sen}(4x)}{4\times x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} \underset{(1)}{=} 4\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 4\times 1 = 4$$

(1) fazendo $y = 4x$, se $x \to 0$, então $y \to 0$

7.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \left(2 + \operatorname{sen}(4x)\right)' = (2)' + \left(\operatorname{sen}(4x)\right)' = 0 + (4x)' \cos(4x) = 4\cos(4x)$$

Para estudar o sinal da derivada, calculamos os zeros:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\,, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k ($k = 0$ e $k = 1$) encontramos as duas soluções da equação que pertencem ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja $x = \frac{\pi}{8}$ e $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

Estudando a variação do sinal de g' para relacionar com a monotonia de g, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Assim, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que:

- o valor do máximo de g é $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$
- o valor do mínimo de g é $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + (-1) = 1$
- g é crescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{8}\right]$ e também no intervalo $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$
- g é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$