

## Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

**Prova 635/Época Especial**

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

**2009**

### COTAÇÕES

<b>GRUPO I</b> .....	(8 × 5 pontos) .....	<b>40 pontos</b>
<b>GRUPO II</b> .....		<b>160 pontos</b>
1. ....		15 pontos
2. ....		15 pontos
3. ....		15 pontos
4. ....		30 pontos
4.1. ....	15 pontos	
4.2. ....	15 pontos	
5. ....		15 pontos
6. ....		15 pontos
7. ....		30 pontos
7.1. ....	15 pontos	
7.2. ....	15 pontos	
8. ....		25 pontos
8.1. ....	15 pontos	
8.2. ....	10 pontos	
<b>TOTAL</b> .....		<b>200 pontos</b>

**A classificação da prova deve respeitar integralmente  
os critérios gerais e específicos a seguir apresentados**

### **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada item é obrigatoriamente:

- um número inteiro;
- um dos valores resultantes da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação e previstos na respectiva grelha de classificação.

As respostas que se revelem ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de um item, o mesmo pode ser classificado se, pela resposta apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser apenas considerada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Nos itens de resposta fechada de escolha múltipla, a cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentam, de forma inequívoca, a única alternativa correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

- uma alternativa incorrecta;
- mais do que uma alternativa.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de resposta aberta extensa orientada, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos.

<b>Nível</b>	<b>Descritor</b>
<b>3</b>	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>2</b>	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
<b>1</b>	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto.  O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

\* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

Situação	Classificação
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	<p>A etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se as correcções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos;</li> <li>- nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Respostas	C	C	B	D	A	B	A	D

### GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no programa (ver critério 4 dos critérios gerais).

1. .... 15 pontos

Escrever  $z = \frac{(3 - 2i) + (3 - 2i)^2 + 2i^{43}}{8 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$  ..... 1 ponto

Simplificar o numerador da fracção ..... 8 pontos

Escrever  $i^{43} = -i$  ..... 1 ponto

Calcular  $(3 - 2i)^2$  ..... 4 pontos

Restantes cálculos ..... 3 pontos

Escrever  $8 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -8i$  ..... 2 pontos

Calcular  $\frac{8 - 16i}{-8i}$  ..... 4 pontos

Multiplicar ambos os termos da fracção por  $i$  (por exemplo) ..... 2 pontos

Restantes cálculos ..... 2 pontos

2. .... 15 pontos

Escrever  $(2 \operatorname{cis} \theta)^2 = 4 \operatorname{cis}(2\theta)$  ..... 1 ponto

Escrever  $(1 + \sqrt{3}i)$  na forma trigonométrica ..... 5 pontos

Módulo ( $\rho = 2$ ) ..... 2 pontos

Argumento  $\left(\alpha = \frac{\pi}{3}\right)$  ..... 2 pontos

Apresentar na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever  $4 \operatorname{cis}(2\theta) \times 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$  (**ver nota**)..... 1 ponto

Determinar o valor de  $\theta$  pertencente ao intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ..... 8 pontos

Identificar a expressão geral dos argumentos de um número complexo cuja imagem geométrica pertence à bissetriz do 3.º Q ... 3 pontos

Resolver a equação  $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ..... 3 pontos

Concluir que  $\theta = \frac{11}{24}\pi$  ..... 2 pontos

**Nota:** Se na resolução o examinando utilizar apenas os argumentos, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

3. .... 15 pontos

A demonstração deve abordar os seguintes pontos:

- propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
- propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos;
- leis de De Morgan.

Na tabela seguinte, indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com o respectivo nível de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho			Pontuação
Níveis*	4	A demonstração aborda correctamente os três pontos, concluindo o pretendido.	15 pontos
	3	A demonstração aborda correctamente os três pontos, mas não conclui o pretendido.	12 pontos
	2	A demonstração aborda correctamente apenas dois pontos.	8 pontos
	1	A demonstração aborda correctamente apenas um ponto.	4 pontos

\* No caso de a resposta não atingir o nível 1, a classificação a atribuir é zero pontos.

**4.1.** ..... **15 pontos**

Expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) ..... 13 pontos

Calcular o valor pedido (24) (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir.

${}^3C_2 \times 4 \times 2$  (ou equivalente) ..... 13 pontos

Outras situações ..... 0 pontos

2. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a etapa anterior não tiver sido classificada com zero pontos.

**4.2.** ..... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável  $X$  pode tomar ( $X_i \in \{ 1, 2, 4 \}$ ) (**ver nota**) ... 3 pontos

Indicar o número de casos possíveis ..... 3 pontos

Indicar o número de casos favoráveis para cada um dos valores da variável .... 3 pontos

Construir a tabela de distribuição de probabilidades ..... 3 pontos

Calcular o valor médio ..... 3 pontos

**Nota:** Se os valores da variável não estiverem todos correctos, a classificação a atribuir a esta etapa é zero pontos.



A composição deve abordar a razão pela qual cada um dos gráficos incorrectos é excluído.

- Gráfico 1: é excluído, porque, quando  $x = 0$  ou  $x = 2$ , a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$  não é igual a 1; ou porque, quando  $x = 1$ , a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$  não é inferior a 1;
- Gráfico 2: é excluído, porque, para valores de  $x$  superiores a 2, a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$  não tende para um valor finito;
- Gráfico 3: é excluído, porque, quando  $x = 0$  ou  $x = 2$ , a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$  não é igual.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a justificação pedida, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa, descritos nos critérios gerais e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa		Níveis*			
		1	2	3	
Níveis**	3	A composição aborda correctamente a exclusão dos gráficos 1, 2 e 3.	13	14	15
	2	A composição aborda correctamente a exclusão dos gráficos 1 e 2 ou 1 e 3 ou 2 e 3.	8	9	10
	1	A composição aborda correctamente a exclusão do gráfico 1 ou do 2 ou do 3.	3	4	5

\* Descritores apresentados nos critérios gerais.

\*\* Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

6. .... 15 pontos

Justificar que a função  $g$  não tem assíntotas verticais ..... 3 pontos

Averiguar da existência da assíntota não vertical quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 6 pontos

Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  ..... 2 pontos

Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx)$  ..... 2 pontos

Concluir que a recta de equação  $y = 1$  é uma assíntota

horizontal do gráfico de  $g$  quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 2 pontos

Averiguar da existência da assíntota não vertical quando  $x \rightarrow -\infty$  ..... 6 pontos

Calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$  ..... 4 pontos

Concluir que não existe assíntota não vertical do gráfico

de  $g$  quando  $x \rightarrow -\infty$  ..... 2 pontos

7.1. .... 15 pontos

Determinar  $f'(x) = e^x(\cos(x) - \text{sen}(x))$  ..... 3 pontos

Determinar o zero de  $f'$  no intervalo ..... 4 pontos

Escrever  $f'(x) = 0$  ..... 1 ponto

Escrever  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ..... 2 pontos

Indicar o zero de  $f' \left( \frac{\pi}{4} \right)$  ..... 1 ponto

Estudar o sinal de  $f'$  e consequente conclusão, relativamente à monotonia e aos extremos relativos de  $f$  no intervalo  $[0, \pi[$ : (o estudo pode ser apresentado através de um quadro) (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável  $x$ , de acordo com o intervalo em estudo) ..... 2 pontos

Sinal de  $f'$  ..... 2 pontos

Relação entre o sinal de  $f'$  e a monotonia de  $f$  ..... 1 ponto

Determinar o mínimo ( $f(0) = 1$ ) ..... 1 ponto

Determinar o máximo  $\left( f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} \right)$  ..... 1 ponto

Indicar os intervalos de monotonia (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

**Nota:**

1. Se o examinando não recorrer a um quadro, mas apresentar uma justificação equivalente, não deve ser desvalorizada a classificação a atribuir a esta etapa.

2. São de aceitar, como resposta correcta, os intervalos  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  ou  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ , para a indicação do

intervalo em que a função é monótona crescente, e os intervalos  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$  ou  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right[$ , para a indicação

do intervalo em que a função é monótona decrescente.

<b>7.2.</b> .....	<b>15 pontos</b>
Representar graficamente a função $f$ .....	3 pontos
Assinalar os pontos $A$ , $B$ e $C$ ..... (1 + 1 + 1) .....	3 pontos
Desenhar o trapézio .....	1 ponto
Determinar o comprimento da base maior do trapézio .....	2 pontos
Determinar o comprimento da base menor do trapézio .....	2 pontos
Indicar a altura do trapézio .....	1 ponto
Escrever $A_{[OABC]} = \frac{1,29 + 1,57}{2} \times 1$ .....	1 ponto
Obter a área do trapézio ( $\text{Área} = 1,4$ ) .....	2 pontos

<b>8.1.</b> .....	<b>15 pontos</b>
Escrever $M_1 - M_2 = 0,67 \log E_1 - 0,67 \log E_2$ .....	2 pontos
Resolver a equação $1 = 0,67 \log E_1 - 0,67 \log E_2$ .....	11 pontos
Cálculos até $\frac{1}{0,67} = \log \frac{E_1}{E_2}$ .....	6 pontos
Escrever $\frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{1}{0,67}}$ .....	4 pontos
Escrever $\frac{E_1}{E_2} = 31$ .....	1 ponto
Interpretar o resultado obtido no contexto da situação .....	2 pontos

<b>8.2.</b> .....	<b>10 pontos</b>
Escrever $4,7 = 0,67 \log E - 3,25$ .....	1 ponto
Resolver a equação .....	7 pontos
Cálculos até $\log E = 11,87$ .....	3 pontos
Obter o valor de ( $E = 10^{11,87}$ ) .....	4 pontos
Resultado final ( $E = 7 \times 10^{11}$ joules) .....	2 pontos

Código Confidencial da Escola	Número Convencional da Prova	GRUPO I								GRUPO II								TOTAL da PROVA (200)																												
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.1.		7.2.	8.1.	8.2.																									
		(5)	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)	(15)		(15)	(15)	(10)																									

Data \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

O Professor Classificador \_\_\_\_\_