Exame nacional de Matemática A **(2009, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a Maria escolheu 2 CD de um conjunto de 9, sem considerar a ordem relevante, existem ${}^9C_2$ pares diferentes que podem ser escolhidos (número de casos possíveis).
   Como 7 eram de um tipo e 2 de outro, existem 7×2 pares de CD compostos por um de música rock e o outro ser de música popular, ou seja 7×2 casos favoráveis.
   Assim, a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música rock e o outro ser de música popular, é:
   $$\frac{7 \times 2}{{}^9C_2} = \frac{7}{18}$$
   Resposta: **Opção D**

2. Considerando a experiência aleatória que na realização dos dois testes no mesmo dia, pelo estudante, e os acontecimentos:
   T_1:≪Ter positiva no primeiro teste≫
   T_2:≪Ter positiva no segundo teste≫

   Temos que $P(T_1) = 0{,}7$; $P(T_2) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}\right) = 0{,}1$
   Pelo teorema do acontecimento contrário, vem que $P\left(\overline{T_1}\right) = 1 - P(T_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
   Assim,a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste, é:
   $$P\left(\overline{T_2}|\overline{T_1}\right) = \frac{P\left(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}\right)}{P\left(\overline{T_1}\right)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$
   Resposta: **Opção C**

3. A linha do triângulo de Pascal que é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$ tem 15 elementos, dos quais, apenas 2 são iguais a 14 (${}^{14}C_1$ e ${}^{14}C_{13}$), pelo que a probabilidade de um número desta linha, escolhido ao acaso, ser o número 14 é $\frac{2}{15}$.

   Resposta: **Opção C**

4. Calculando as imagens das abcissas dos pontos indicados em cada uma das opções pela função f, temos:

   - $f(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$
   - $f(\ln 2) = e^{\ln 2+1} = e^{\ln 2} \times e^1 = 2 \times e = 2e$
   - $f(\ln 5) = e^{\ln 5+1} = e^{\ln 5} \times e^1 = 2 \times e = 5e$
   - $f(-2) = e^{-2+1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

   Pelo que podemos verificar que, de entre os pontos apresentados, o ponto de coordenadas $(\ln 2, 2e)$ é o único que pertence ao gráfico de f.

   Resposta: **Opção B**

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ é o declive da assíntota do gráfico de f, ou seja o declive da reta r

   Como os pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $(1,0)$, pertencem à assíntota, então o seu declive é

   $$m_r = \frac{0-(-1)}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

   E assim, vem que:

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r = 1$$

   Resposta: **Opção C**

6. Como a derivada de g é:

   $$g'(x) = \big(f(x)+x\big)' = \big(f(x)\big)' + (x)' = f'(x) + 1$$

   Assim, o gráfico de g' é a translação do gráfico de f' pelo vetor $\vec{u} = (1,0)$, ou seja com um deslocamento vertical de uma unidade no sentido positivo.
   Desta forma o gráfico da opção (D) é o único compatível com esta informação.

   Resposta: **Opção D**

7. Simplificando a expressão indicada para z_1, temos:
   $z_1 = (k-i)(3-2i) = 3k - 2ki - 3i + 2i^2 = 3k + i(-2k-3) + 2(-1) = 3k - 2 + i(-2k-3)$

   Ou seja, $\operatorname{Re}(z_1) = 3k - 2$ e $\operatorname{Im}(z_1) = -2k - 3$

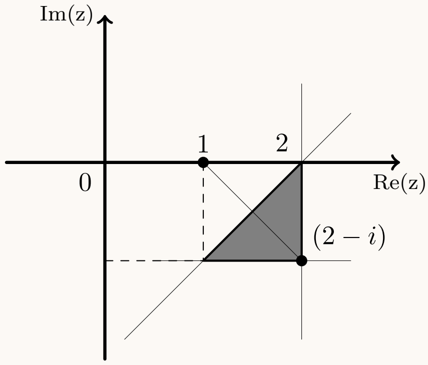
   E para que z_1 seja um imaginário puro, $\operatorname{Re}(z_1) = 0$, logo temos que:

   $3k - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3k = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \dfrac{2}{3}$

   Resposta: **Opção C**

8. Os pontos representado na região a sombreado satisfazem cumulativamente três condições:

   - $\text{Re}\,(z) \leq 2$, ou seja pertencem ao semiplano à direita da reta definida por $\text{Re}\,(z) = 2$
   - $\text{Im}\,(z) \geq -1$, ou seja pertencem ao semiplano acima da reta definida por $\text{Im}\,(z) = -1$
   - $|z-1| \geq |z-(2-i)|$, ou seja pertencem ao semiplano definido pela reta definida por $|z-1| = |z-(2-i)|$ que contém a representação geométrica de $(1-2i)$, porque queremos considerar os pontos cuja distância ao ponto (1,0) é maior que a distância ao ponto $(2,-1)$.

   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

---

1. Começamos por usar a fórmula de Moivre para calcular $\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 = 1^7\,\text{cis}\left(7 \times \frac{\pi}{7}\right) = \text{cis}\,\pi = -1$

   Como a adição deve ser feita na f.a. vamos optar por calcular $(2+i)^3$ também na f.a.:

   $(2+i)^3 = (2+i)(2+i)^2 = (2+i)(4+4i-1) = (2+i)(3+4i) = 6+8i+3i+4i^2 = 6-4+11i = 2+11i$

   Escrevendo $4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ na f.a. temos: $4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4i$

   Assim, simplificando a expressão de z, vem:

$$z = \frac{\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 + (2+i)^3}{4\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{-1+2+11i}{-4i} = \frac{(1+11i)\times i}{-4i \times i} = \frac{i+11i^2}{-4i^2} = \frac{-11+i}{-4(-1)} = \frac{-11+i}{4} = -\frac{11}{4}+\frac{1}{4}i$$

2. Temos que $w = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$, pelo que $\overline{w} = a - bi$ e $-w = -a - bi$.

   Como $\overline{BC} = |\overline{w} - (-w)| = |a - bi - (-a - bi)| = |a - bi + a + bi| = |2a|$ e $\overline{BC} = 8$, vem que:

   $|2a| = 8$, como $a > 0$, sabemos que $2a = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$

   E como $w = \sqrt{a^2 + b^2}$, sendo $a = 4$, vem que $w = \sqrt{4^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2}$. Como $|w| = 5$, vem que:

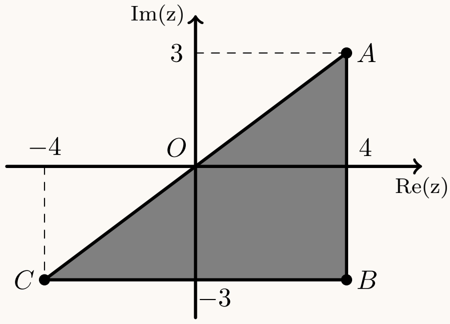
   $\sqrt{16 + b^2} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{16 + b^2}\right)^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16 + b^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 25 - 16 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm\sqrt{9}$

   Como $b > 0$, sabemos que $b = \sqrt{9} = 3$

   Assim, como $a = 4$ e $b = 3$ temos que:

   - $w = a + bi = 4 + 3i$
   - $\overline{w} = a - bi = 4 - 3i$
   - $-w = -a - bi = -4 - 3i$

   Pelo que podemos representar o triângulo, e perceber que considerando $[BC]$ a base do triângulo ($\overline{BC} = 8$), a altura é $[AB]$ ($\overline{AB} = |w - \overline{w}| = 6$).



   Assim temos que a área é:
   $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \dfrac{8 \times 6}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
1 - P(A|B) \times P(B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) && (1)\\
&= 1 - P(A \cap B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) \\
&= 1 - P(A \cap B) - \Big(P(A) - P(A \cap B)\Big) && (2)\\
&= 1 - P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B) \\
&= 1 - P(A) && (3)\\
&= P\left(\overline{A}\right)
\end{aligned}$$

(1) Definição: $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$
(2) Teorema: $P\left(X \cap \overline{Y}\right) = P(X) - P(X \cap Y)$
(3) Teorema: $P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X)$

   Logo, $1 - P(A|B) \times P(B) - P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right)$ *q.e.d.*

4.

   4.1. Sendo ases a primeira e a última cartas da sequência, existem ${}^4A_2$ formas de arranjar os extremos da sequência (selecionamos 2 dos 4 ases existentes, que por serem diferentes, deve ser considerada relevante a ordem de colocação).
   Considerando as 3 posições centrais, da sequência, ocupadas por figuras, existem ${}^{12}A_3$ configurações diferentes (que correspondem a selecionar 3 das 12 figuras existentes, e considerar relevante a ordem, por serem todas diferentes).
   Logo o número total de sequências que se podem formar em que a primeira carta e a última carta são ases, e as restantes são figuras é

$${}^4A_2 \times {}^{12}A_3 = 15\,840$$

4.2. Calculando a probabilidade recorrendo à Regra de Laplace, ou seja, o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (considerando os casos possíveis equiprováveis), obtemos a expressão $\frac{{}^4C_2 \times 48}{{}^{52}C_3}$.
O número de casos possíveis são todos os conjuntos de 3 cartas que se podem formar com as 52 cartas do baralho, sem considerar relevantes a ordem pela qual se dispõem as cartas, ou seja ${}^{52}C_3$ hipóteses diferentes.
O número de casos favoráveis é o número de conjuntos formados por 2 ases (escolhidos de entre os 4 que existem - um por cada naipe), $4C_2$, e ainda uma outra carta escolhida de entre as 48 que não são ases $(52 - 4 = 48)$. Ou seja, ${}^4C_2 \times 48$ hipóteses diferentes.

5.

5.1. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = (\text{sen}\,(2x)\cos x)' = \left(\text{sen}\,(2x)\right)'\cos x + \text{sen}\,(2x)(\cos x)' = (2x)'\cos(2x)\cos x + \text{sen}\,(2x)(-\,\text{sen}\,x) =$$

$$= 2\cos(2x)\cos x - \,\text{sen}\,(2x)\,\text{sen}\,x$$

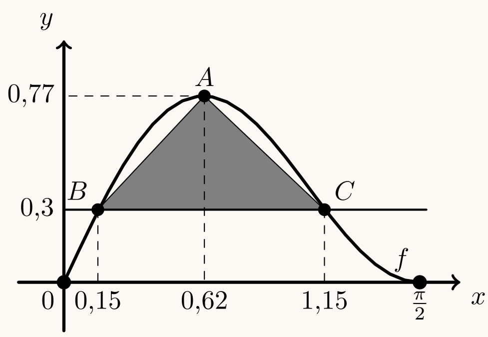
Assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0, pode ser calculado como:

$$m = f'(0) = 2\cos(2(0))\cos 0 - \,\text{sen}\,(2(0))\,\text{sen}\,0 = 2 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 = 2$$

Como $f(0) = \,\text{sen}\,(2(0))\cos 0 = 0 \times 1 = 0$, sabemos que o ponto $P(0{,}0)$ pertence ao gráfico de f e também à reta tangente neste ponto.
Como a reta tangente interseta o eixo das ordenada no ponto $(0{,}0)$, o valor da ordenada na origem é zero, logo a equação reduzida é

$$y = 2x + 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x$$

5.2. Começamos por representar na calculadora gráfica a função f a reta de equação $y = 0{,}3$, numa janela compatível com o domínio e obtemos o gráfico que está reproduzido na figura seguinte, onde ainda se acrescentou o triângulo $[ABC]$.



Recorremos à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para o maximizante e o respetivo máximo de uma função, determinamos as coordenadas, com duas casas decimais, do ponto $A(0{,}62;0{,}77)$.

Usando a função da calculadora pra determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos as abcissas, com duas casas decimais, dos pontos B e C: $x_B \approx 0{,}15$ e $x_C \approx 1{,}15$.
Assim, podemos calcular a medida da base do triângulo, como a diferença das abcissas dos pontos C e B, ou seja: $x_C - x_B \approx 1{,}15 - 0{,}15 \approx 1$.
A altura do triângulo pode ser calculada como a diferença das ordenadas dos pontos A e B, ou seja: $y_A - y_B \approx 0{,}77 - 0{,}3 \approx 0{,}47$

Assim, calculando um valor aproximado às décimas da área do triângulo, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{(x_C - x_B) \times (y_A - y_B)}{2} \approx \frac{0{,}47}{2} \approx 0{,}2$$

6.

6.1. Como a função h, é definida em $\mathbb{R}^+$ por operações sucessivas de funções contínuas neste intervalo, então f é contínua para $x > 0$

De forma análoga, temos que h é contínua para $x < 0$, porque é definida, neste intervalo, por operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^-$

Assim, resta averiguar se a função h é contínua para $x = 0$, ou seja, temos que verificar se

$$h(0) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$$

- $h(0) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{0^2+4} - 0 = \sqrt{4} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{e^0-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{2\times x} = \lim_{x\to 0^-} 2 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} =$$

(fazendo $y = 2x$, temos que se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$)

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

Como $h(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, a função h é contínua em $x = 0$, e como é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, temos que é contínua em $\mathbb{R}$

6.2. Como a função h é contínua em $\mathbb{R}$ (de acordo com os cálculos do item anterior), e em particular como $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 2$, então a reta de equação $x = 0$ não é assíntota do gráfico de h e não existem outras assíntotas verticais do gráfico de h

Para averiguar se existem assíntotas horizontais do gráfico de h, vamos calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{+\infty+4} - (+\infty) = +\infty - \infty$ (indeterminação)

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)}{\sqrt{x^2+4} + x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+4} + x} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4} + x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4} + x} = \frac{4}{\sqrt{+\infty+4} + \infty} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{e^{2(-\infty)}-1}{-\infty} = \dfrac{0-1}{-\infty} = 0$

Desta forma, como $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = 0$, temos que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de h (quando $x \to +\infty$ e também quando $x \to -\infty$).

7.

7.1. Calculando a área afetada quando a doença foi detetada ($t = 0$), e a área afetada uma semana depois ($t = 1$), temos:

$$A(0) = 2 - 0 + 5\ln(0+1) = 2 + 5\times 0 = 2$$

$$A(1) = 2 - 1 + 5\ln(1+1) = 1 + 5\ln(2)$$

Assim, o aumento da área afetada registado na primeira semana, em hectares, arredondado às centésimas é de

$$A(1) - A(0) = 1 + 5\ln(2) - 2 = 5\ln(2) - 1 \approx 2{,}47 \text{ ha}$$

7.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(t) = \left(2-t+5\ln(t+1)\right)' = (2)'-(t)'+\left(5\ln(t+1)\right)' = 0-1+5\left(\frac{(t+1)'}{t+1}\right) = -1+5\left(\frac{1}{t+1}\right) = -1+\frac{5}{t+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(t)=0 \;\Leftrightarrow\; -1+\frac{5}{t+1}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{t+1}=1 \;\Leftrightarrow\; 5=t+1 \,\wedge\, t+1\neq 0 \;\Leftrightarrow\; 4=t \,\wedge\, \underbrace{t\neq -1}_{\text{PV, } t\in[0,16[}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		4		16
A'	+	+	0	−	n.d.
A	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim, como A é crescente no intervalo $[0,4]$ e decrescente no intervalo $[4,16[$ podemos concluir que 4 é único o maximizante da função, pelo que $A(4)$ é o único mínimo da função.
Calculando o valor do máximo da função e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$A(4) = 2-4+5\ln(4+1) = -2+5\ln 5 \approx 6{,}05$$

Logo, a área máxima afetada pela doença foi aproximadamente de 6,05 ha