Exame nacional de Matemática A **(2010, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$, calculamos o valor de $P(B)$, substituindo os valores conhecidos:

   $$P(B) = 70\% + 0\% - 30\% = 40\%$$

   Resposta: **Opção B**

2. Considerando que a ordem de seleção dos 3 trabalhadores é irrelevante, por não existir diferenciação dentro do grupo, existem ${}^{10}C_3$ grupos diferentes compostos por 3 dos 10 trabalhadores.
   Como os 3 amigos estão presentes simultaneamente apenas em apenas 1 destes grupos (porque a ordem foi considerada irrelevante), a probabilidade de serem escolhidos, exatamente, os três amigos é $\dfrac{1}{{}^{10}C_3}$

   Resposta: **Opção C**

3. Como a soma das probabilidades é 1, temos que:

   $$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2a + a = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a = \frac{10}{10} - \frac{2}{10} - \frac{5}{10} \Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \Leftrightarrow a = \frac{3}{30} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

   Logo, temos que $P(X = 2) = 2 \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$, e assim

   $$P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{5}$$

   Resposta: **Opção B**

4. Como $h(x) = f(x) + e^x$ e a derivada de uma função afim é o valor do declive (o seu gráfico é uma reta), determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, vem:

   $$h'(x) = \big(f(x) + e^x\big)' = \big(f(x)\big)' + (e^x)' = m + e^x$$

   $$h''(x) = \big(m + e^x\big)' = (m)' + (e^x)' = 0 + e^x = e^x$$

   Assim, apenas o gráfico da opção (A) é compatível com a expressão determinada para a segunda derivada.

   Resposta: **Opção A**

5. Como o domínio da função f é $]-\infty,1[$,e a reta de equação $x=1$ é assíntota do gráfico da função, então, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

E assim

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(3x)}{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)} = \frac{3\times 1^-}{+\infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

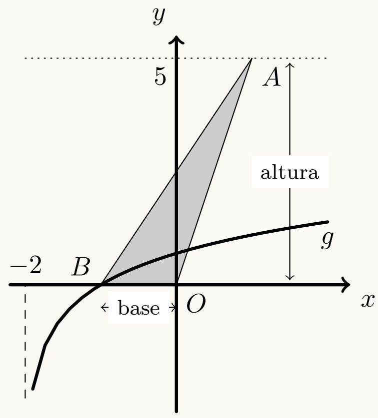
Resposta: **Opção C**

6. Como o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, podemos determinar a sua abcissa, calculando o zero da função g:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=0 \Leftrightarrow x+2=e^0 \Leftrightarrow x=1-2 \Leftrightarrow x=-1$$

E assim, considerando o lado $[OB]$ do triângulo como a base, a altura será a ordenada do ponto A, (independentemente da sua abcissa), pelo que a área do triângulo é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB}\times y_A}{2} = \frac{|x_B|\times y_A}{2} = \frac{1\times 5}{2} = \frac{5}{2}$$



Resposta: **Opção A**

7. z é um imaginário puro, se $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$
Assim temos que:

$$\frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - k\pi, k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{4\pi}{8} - k\pi, k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Atribuíndo valores a k, temos:

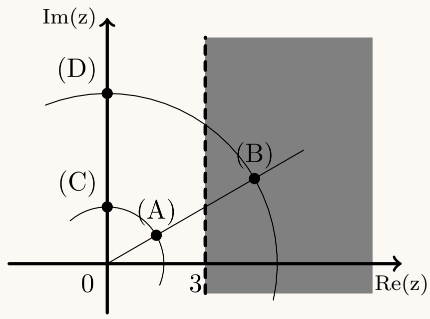
- Se $k=0$, $\theta = -\frac{3\pi}{8}$
- Se $k=-1$, $\theta = -\frac{3\pi}{8} + \pi = -\frac{3\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

Resposta: **Opção D**

8. Os números complexos das opções (A) e (C) não pertencem ao semiplano apresentado, porque as respetivas representações geométricas distam menos de 3 unidades da origem. Como o número complexo da opção (D) está sobre o eixo imaginário, também não pertence ao semiplano apresentado.

Como $\text{Re}\left(3\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\times 3}{2} = \frac{9}{2}$

Temos que $\text{Re}\left(3\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) > 3$



Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por determinar $(z_1)^7$, recorrendo à fórmula de Moivre, e escrever o resultado na f.a.:

$$(z_1)^7 = \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 = \operatorname{cis}\left(7 \times \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{cis}\pi = -1$$

Como $\overline{z_2} = 2 - i$, temos que:

$$w = \frac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}} = \frac{3 - i \times (-1)}{2 - i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6 + 3i + 2i + i^2}{2^2 - i^2} = \frac{6 - 1 + 5i}{4 + 1} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $w = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

1.2. Como não podemos calcular somas na f.t., devemos escrever z_1 na f.a.:
$z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$

Assim temos que:
$z_1 + z_2 = \cos\frac{\pi}{7} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + 2 + i = 2 + \cos\frac{\pi}{7} + i\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)$

Logo, $|z_1 + z_2|^2 = \left(\sqrt{\left(2 + \cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2}\right)^2 = \left(2 + \cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$

$$= 2^2 + 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$

$$= 4 + 4\cos\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + 1 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$

$$= 5 + 4\cos\frac{\pi}{7} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 = 5 + 4\cos\frac{\pi}{7} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + 1 =$$

$$= 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos alunos da escola , e os acontecimentos:
C:≪O aluno tem computador portátil≫
D:≪O aluno sabe o nome do diretor≫

Temos que $P(C) = \frac{1}{5}$; $P\left(\overline{D}\right) = \frac{1}{2}$ e $P\left(C|\overline{D}\right) = \frac{1}{3}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(C|\overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P(C|\overline{D}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(C \cap D) = P(C) - P\left(C|\overline{D}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$
- $P(D) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

	C	$\overline{C}$	
D	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{D}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{5}$		1

Assim, calculando a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do diretor, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P\left(\overline{C} \cap D\right) = P(D) - P(C \cap D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$$

2.2. Como a quinta parte dos alunos tem computador portátil e existem 150 alunos, temos que o número de alunos com computador portátil é $\frac{1}{5} \times 150 = 30$.
Assim, o número de conjuntos de 4 alunos formados a partir destes 30, é ${}^{30}C_4$.
A cada um destes grupos de 4 alunos podem juntar-se ${}^{120}C_2$ pares de alunos sem computador portátil (existem $150 - 30 = 120$ alunos sem computador portátil).
Assim, o número de comissões diferentes que se pode formar com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil é

$${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 195\,671\,700$$

3. De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
Relativamente ao número de casos possíveis, como existem 18 bolas no saco e são retiradas duas, simultaneamente, podem ser formados 18×17 pares de bolas, considerando a ordenação relevante.
Quanto ao número de casos favoráveis, considerando a ordenação relevante, para garantir a coerência com o cálculo do número de casos possíveis, temos que o par de bolas da mesma cor pode ser formado por duas bolas azuis: 12×11 pares, ou duas bolas vermelhas: 6×5 pares.
Assim temos que o número de casos favoráveis é $12 \times 11 + 6 \times 5$ e a probabilidade de tirar duas bolas do saco, simultaneamente, ao acaso, e elas formarem um par da mesma cor é $\frac{12 \times 11 + 6 \times 5}{18 \times 17}$

4.

4.1. Aplicando as regras operatórias dos logaritmos, vem que, para qualquer valor de $t \in [0,5]$:

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1) = 8 \times 3\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) =$$

$$= 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) = 16\log_4(3t+1)$$

4.2. Como $N(t)$ é o número de bilhetes vendidos, em centenas, t horas após o início da venda, e 2400 bilhetes são 24 centenas de bilhetes, o tempo necessário para vender 2400 bilhetes é a solução da equação $N(t) = 24$:

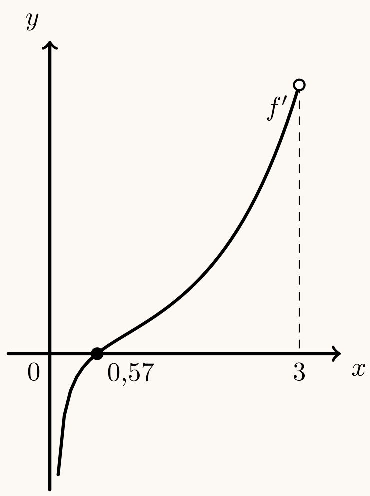
$$N(t) = 24 \Leftrightarrow 16\log_4(3t+1) = 24 \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{24}{16} \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3t+1 = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{64} \Leftrightarrow 3t+1 = 8 \Leftrightarrow 3t = 8-1 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$$

Escrevendo o resultado em horas e minutos, temos que $t = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, e como $\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos, temos que serão necessárias 2 horas e 20 minutos para que sejam vendidos 2400 bilhetes.

5. Para estudar a monotonia da função f, devemos analisar o sinal da função f', pelo que podemos traçar o gráfico de f' na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função, para obter o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para um zero de uma função, num intervalo, podemos encontrar a solução da equação $f'(x) = 0$, com aproximação às centésimas: $x \approx 0{,}57$.



Pela análise do gráfico podemos ainda determinar a variação do sinal da função f', para depois relacionar com a monotonia da função f:

x	0		0,57		3
f'	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Assim temos que a função f:

- é decrescente no intervalo $]0; 0{,}57[$
- é crescente no intervalo $]0{,}57; 3[$
- tem um mínimo absoluto para $x \approx 0{,}57$

6.

6.1. Como o domínio da função é f é $]-\infty, 2\pi]$, o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando $x \to -\infty$, pelo que, pela definição de assíntota, $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f se

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - (ax+b)\Big) = 0$$

Calculando o valor do limite, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - (ax+b)\Big) = \lim_{x\to-\infty} (ax+b+e^x-ax-b)) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f

6.2. Para que a função f seja contínua em $x=0$, tem que se verificar $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

- $f(0) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax + b + e^x) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x}\right) = \frac{0 - \operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{2 \times \operatorname{sen}(2x)}{2 \times x}\right) = 1 - \lim_{x\to 0^+} \left(2 \times \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right) =$$

$$= 1 - 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \underset{(1)}{=} 1 - 2\underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$$

(1) (fazendo $y = 2x$, se $x \to 0^+$ então $y \to 0^+$)

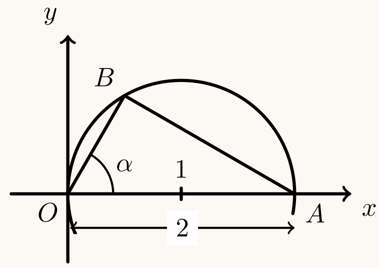
Assim, podemos determinar o valor de b:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow b - 1 = -1 \Leftrightarrow b = -2$$

7.

7.1. Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ($\overline{OA} = 2$).

Assim, recorrendo à definição de seno temos:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\operatorname{sen}\alpha$$

Analogamente, pela definição de cosseno, vem:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\cos\alpha$$

Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2 + 2\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

7.2. Determinando a expressão da derivada da função, vem:

$f'(\alpha) = \big(2(1+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\big)' = 2\big((1)'+(\cos\alpha)'+(\operatorname{sen}\alpha)'\big) = 2(0-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) = 2(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)$

Assim: $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

Logo, como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sabemos que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ é a única solução da equação $f'(\alpha) = 0$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	n.d.	+	0	−	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Logo, o maximizante de f, ou seja, o valor de α para o qual o perímetro do triângulo é máximo, é $\frac{\pi}{4}$