EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2001 **Julho/Agosto**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a equação $3\,y = \log_2 x \qquad (\,x > 0\,)$

Qual das seguintes condições é equivalente a esta equação?

(A) $x = 8^y$ **(B)** $x = 3\,y^2$ **(C)** $y = 9^x$ **(D)** $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que a sua **derivada**, $\boldsymbol{f'}$, é tal que $f'(x) = x - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

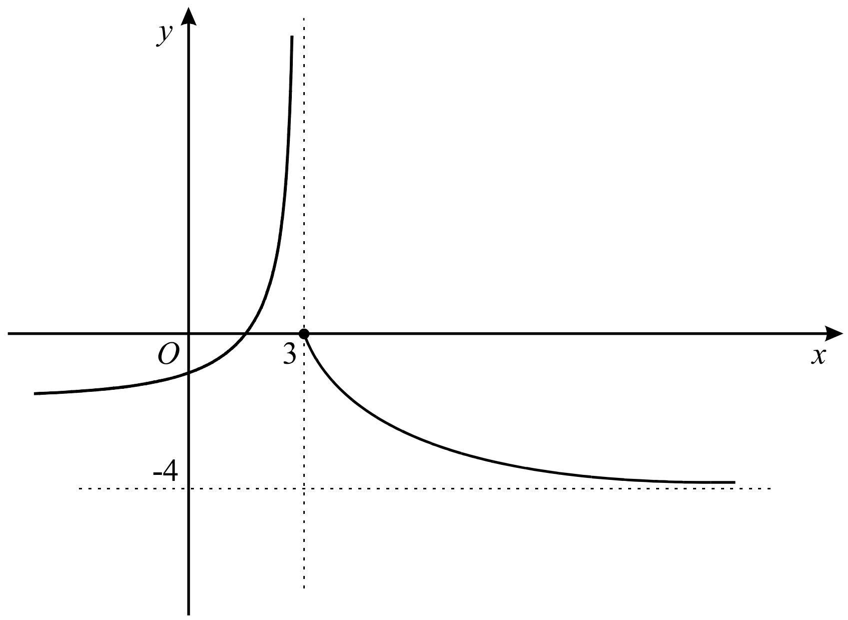
Relativamente à **função** $\boldsymbol{f}$, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) f é crescente em $\mathbb{R}$
(B) f é decrescente em $\mathbb{R}$
(C) f tem um mínimo para $x = 2$
(D) f tem um máximo para $x = 2$

3. Considere, num referencial o.n. xOy, um ponto P, distinto da origem e pertencente à recta de equação $y = 2\,x$.
Seja Q o simétrico de P, em relação à origem do referencial.
Considere o rectângulo de lados paralelos aos eixos do referencial e tal que uma das suas diagonais é o segmento $[PQ]$.
Qual das expressões seguintes dá a área desse rectângulo, em função da abcissa x do ponto P?

(A) $2\,x^2$ **(B)** $6\,x^2$ **(C)** $8\,x^2$ **(D)** $12\,x^2$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
As rectas de equações $x=3$ e $y=-4$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.



Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim g(x_n) = +\infty$

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

(A) $3-\dfrac{1}{n}$

(B) $3+\dfrac{1}{n}$

(C) $-4-\dfrac{1}{n}$

(D) $-4+\dfrac{1}{n}$

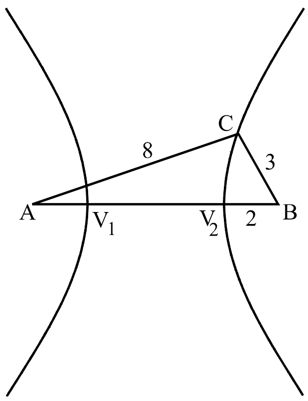
5. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um ponto A pertencente ao semieixo positivo Ox e um ponto B pertencente ao semieixo positivo Oy.
Quais das seguintes podem ser as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$?

(A) $(-2, 0, 1)$ **(B)** $(2, 0, -1)$ **(C)** $(-2, 1, 0)$ **(D)** $(2, -1, 0)$

6. Considere duas rectas distintas, r e s, perpendiculares a um mesmo plano.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira ?

(A) r é perpendicular a s
(B) r e s são concorrentes, mas não perpendiculares
(C) r é paralela a s
(D) r e s não são complanares

7. Na figura está representada parte de uma hipérbole, cujos focos são os pontos A e B e cujos vértices são os pontos V_1 e V_2.



Tem-se ainda que:

- C é um ponto da hipérbole
- $\overline{AC} = 8$
- $\overline{BC} = 3$
- $\overline{V_2B} = 2$

Indique o perímetro do triângulo $[ABC]$.

(A) 19 **(B)** 20 **(C)** 21 **(D)** 22

8. Numa turma com doze raparigas e sete rapazes, vão ser escolhidos cinco elementos para formar uma comissão.
Pretende-se que essa comissão seja constituída por alunos **dos dois sexos**, mas tenha mais raparigas do que rapazes.
Nestas condições, quantas comissões diferentes se podem formar ?

(A) $^{19}C_5 \times {}^5C_3 \; + \; {}^{19}C_5 \times {}^5C_2$ **(B)** $^{12}C_4 \times {}^7C_1 \; + \; {}^8C_3 \times {}^6C_2$

(C) $^{19}C_{12} \times {}^{12}C_3 \; + \; {}^{19}C_7 \times {}^7C_2$ **(D)** $^{12}C_4 \times {}^7C_1 \; + \; {}^{12}C_3 \times {}^7C_2$

9. A soma dos dois últimos números de uma certa linha do triângulo de Pascal é 11.
Qual é a soma dos três primeiros números dessa linha?

(A) 54 **(B)** 56 **(C)** 58 **(D)** 60

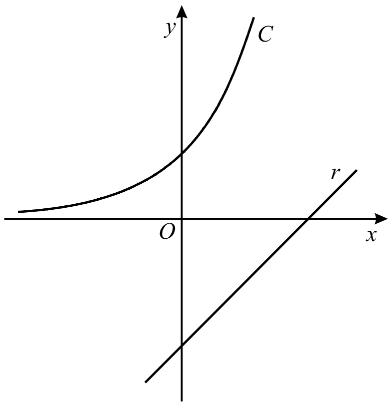
Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy:

- uma curva C, gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- uma recta r, gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$



Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as alíneas seguintes:

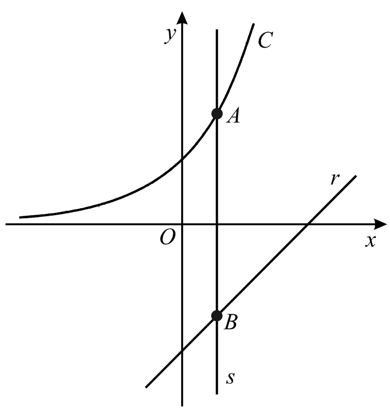
1.1. Determine uma equação da recta paralela à recta r e tangente à curva C.

1.2. Estude a função $f + g$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

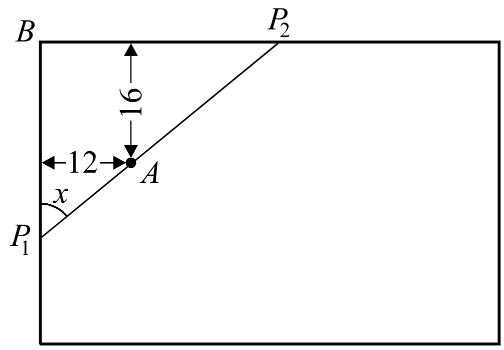
1.3. Considere agora que se acrescentou à figura anterior uma recta s, paralela ao eixo Oy.
Sejam A e B os pontos de intersecção da recta s com a curva C e com a recta r, respectivamente.
Imagine que a recta s se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo Oy. Os pontos A e B acompanham, naturalmente, o deslocamento da recta s.

Seja x a abcissa do ponto A.

Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe $x \in [0, 2]$ tal que $\overline{AB} = 5$.



2. Na figura está representado um lago artificial de forma rectangular.



Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2, tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A, situado a $12\ m$ de uma das margens e a $16\ m$ da outra.

Seja x a amplitude do ângulo $P_2\,P_1B$.

2.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por

$$c(x) = \frac{16\,\text{sen}\,x\ +\ 12\cos x}{\text{sen}\,x\ \cdot\ \cos x}$$

2.2. Considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$
Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

3. Considere:

• uma caixa com seis bolas, todas brancas;

• seis bolas pretas, fora da caixa;

• um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se duas vezes o dado.

Tiram-se, da caixa, tantas bolas brancas quantas o número saído no primeiro lançamento.

Colocam-se, na caixa, tantas bolas pretas quantas o número saído no segundo lançamento.

3.1. Qual é a probabilidade de a caixa ficar com seis bolas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.2. Admita agora que, no primeiro lançamento do dado, saiu a face 5.
Qual é a probabilidade de, no final, ficarem, na caixa, mais bolas pretas do que brancas? Justifique a sua resposta.

4. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$, um prisma e uma pirâmide quadrangulares regulares, com a mesma altura.

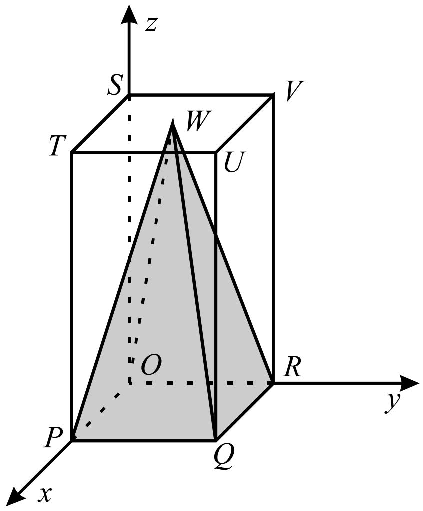
A base do prisma, que coincide com a base da pirâmide, está contida no plano xOy.

O vértice P pertence ao eixo Ox.

O vértice R pertence ao eixo Oy.

O vértice S pertence ao eixo Oz.

O vértice U tem coordenadas $(2, 2, 4)$.



4.1. Escreva uma condição que define a recta TU.

4.2. Calcule a amplitude do ângulo WQV. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.3. Considere o plano de equação $x = y$.
Determine a área da região compreendida entre as secções produzidas, por esse plano, no prisma e na pirâmide.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. 37
- **1.1.** 12
- **1.2.** 13
- **1.3.** 12

2. 24
- **2.1.** 12
- **2.2.** 12

3. 22
- **3.1.** 11
- **3.2.** 11

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**