

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2001

Reserva
(não usada)

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui nove questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

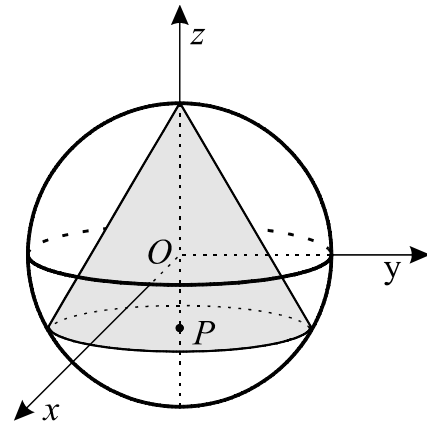
- As nove questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , estritamente crescente.
Qual das seguintes afirmações é **necessariamente** verdadeira?
- (A) A função f não pode ter mais do que um zero.
(B) A função f tem contradomínio \mathbb{R} .
(C) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.
(D) O gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.
2. Para um certo número real a , o gráfico da função g , definida por $g(x) = ax^2 + 3$, tem, no ponto de abcissa 1, uma recta tangente com declive 4.
Qual é o valor de a ?
- (A) 4 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$
3. Considere uma função h , **contínua** em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, tal que:
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow -3} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$
- Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- (A) O gráfico da função h não tem assíptotas verticais.
(B) O gráfico da função h não tem assíptotas horizontais.
(C) A função h tem mínimo absoluto.
(D) A equação $h(x) = 2$ tem pelo menos uma solução.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

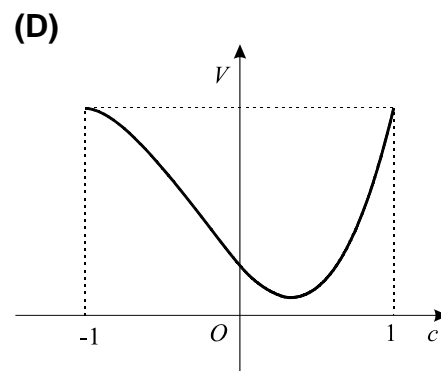
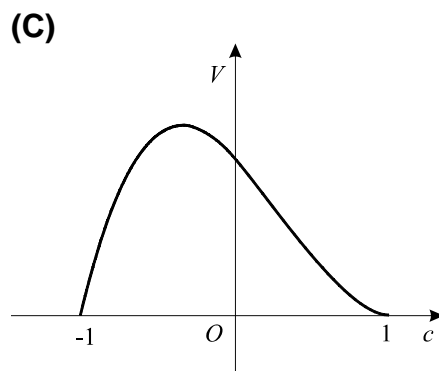
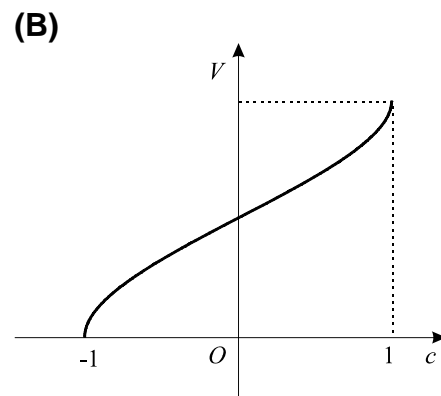
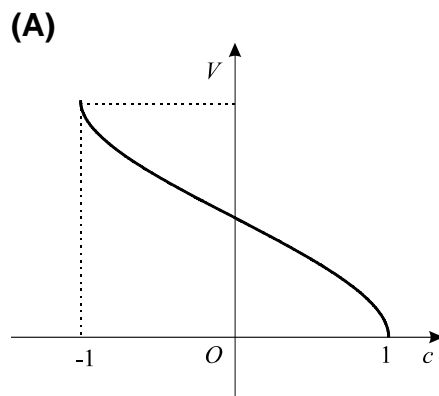
Um ponto P desloca-se sobre o diâmetro que está contido no eixo Oz .

Para cada posição do ponto P , considere o cone, inscrito na superfície esférica, que tem por base o círculo cujo centro é o ponto P e que tem por vértice o ponto $(0, 0, 1)$.



Seja f a função que faz corresponder, à **cota** c do ponto P , o **volume** V do referido cone.

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função f ?



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

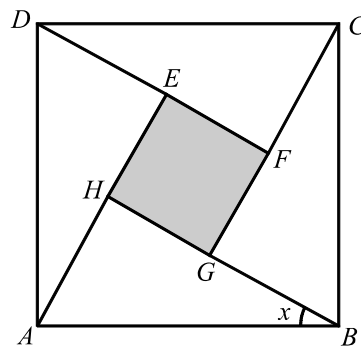
Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
(ln designa logaritmo de base e)

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

- 1.1. Estude a função f quanto à existência de assíptotas verticais.
- 1.2. Investigue se a função f tem máximo e, em caso afirmativo, determine-o.
- 1.3. Considere ainda a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = \frac{1}{2x}$
Determine os valores de x para os quais se verifica $f(x) \leq g(x)$
Apresente o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

2. Na figura,
- $[ABCD]$ é um quadrado de lado 1;
 - $[AHB]$, $[BGC]$, $[CFD]$ e $[DEA]$ são triângulos rectângulos iguais;
 - x designa a amplitude do ângulo HBA .



- 2.1. Mostre que a área da superfície sombreada é dada, em função de x , por

$$f(x) = 1 - \operatorname{sen}(2x) \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

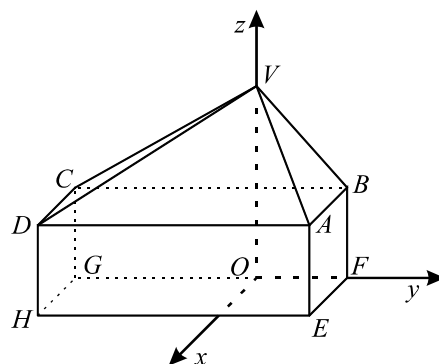
- 2.2. Calcule $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e interprete geometricamente o valor obtido (deve incluir, na sua interpretação, a figura que se obtém para $x = \frac{\pi}{4}$).

3. Um saco contém sete bolas, numeradas de 1 a 7, indistinguíveis ao tacto. Retiram-se sucessivamente, de forma aleatória, **duas** bolas do saco, repondo-se a primeira bola antes de se retirar a segunda.
- 3.1. Qual é a probabilidade de os números saídos serem ambos pares? Apresente o resultado na forma de fracção.
- 3.2. Qual é a probabilidade de saírem dois números cuja soma seja igual a quatro? Apresente o resultado na forma de fracção.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um paralelepípedo rectângulo $[ABCDEFGH]$ e uma pirâmide $[ABCDV]$.

A base $[EFGH]$ do paralelepípedo está contida no plano xOy e a base da pirâmide coincide com a face superior do paralelepípedo.

A aresta $[GF]$ está contida no eixo Oy .



Uma equação da superfície esférica com centro $A(1, 1, 1)$ e que contém G é

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 11$$

- 4.1. Verifique que o ponto H tem coordenadas $(1, -2, 0)$
- 4.2. Mostre que uma equação do plano AGH é $y - 3z + 2 = 0$
- 4.3. Designando por c a cota do ponto V , mostre que o volume do sólido é $2 + c$

Formulário

$$\text{sen}(2x) = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

$$\text{Volume da Pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **81**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **119**

1. **39**

1.1. 13

1.2. 13

1.3. 13

2. **22**

2.1. 11

2.2. 11

3. **22**

3.1. 11

3.2. 11

4. **36**

4.1. 12

4.2. 12

4.3. 12

TOTAL **200**