

PONTO 135/7 Págs.

## EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos  
1999

1.ª Fase  
1.ª Chamada

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

### VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

## Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

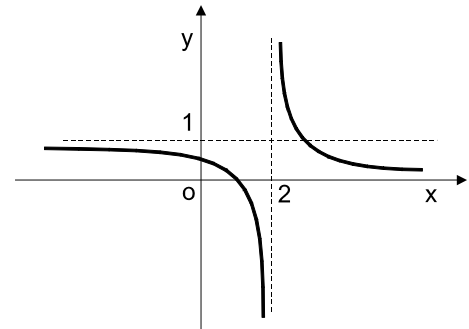
1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função  $f$ , cujo domínio é  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

As rectas de equações  $x = 2$ ,  $y = 1$  e  $y = 0$  são assintotas do gráfico de  $f$ .

Seja  $(x_n)$  a sucessão de termo geral

$$x_n = 2 - n^2$$

Indique o valor de  $\lim f(x_n)$



- (A) 0                      (B) 1                      (C)  $-\infty$                       (D)  $+\infty$

2. Na figura estão representadas:

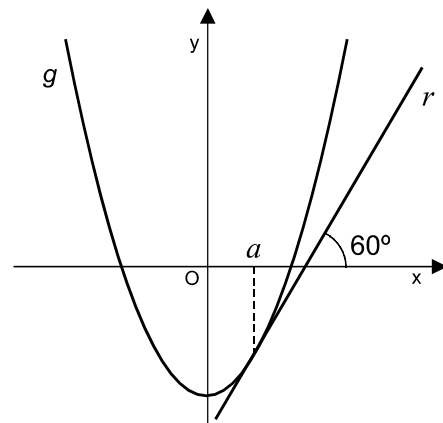
- parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$$

- uma recta  $r$  tangente ao gráfico de  $g$ , no ponto de abscissa  $a$

A inclinação da recta  $r$  é  $60^\circ$

Indique o valor de  $a$



- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{2}$

3. De uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

- $h(0) = 0$
- $h$  é estritamente crescente no intervalo  $[0, 2]$
- $h$  é uma função par

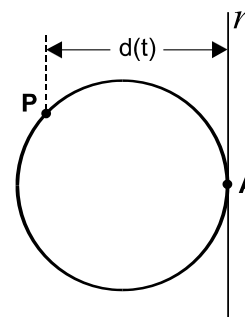
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $h$  tem um máximo relativo para  $x = 0$
- (B)  $h(-1) < 0$
- (C)  $h$  é estritamente decrescente no intervalo  $[-1, 0]$
- (D)  $h(-2) + h(2) = 0$

4. Na figura estão representadas:

- uma circunferência de raio 1
- uma recta  $r$ , tangente à circunferência no ponto  $A$

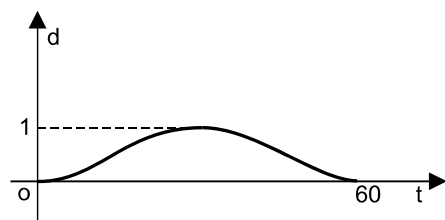
Admita que um ponto  $P$ , partindo de  $A$ , se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos.



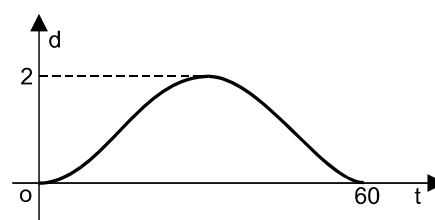
Seja  $d(t)$  a distância do ponto  $P$  à recta  $r$ ,  $t$  segundos após o início do movimento.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função  $d$ ?

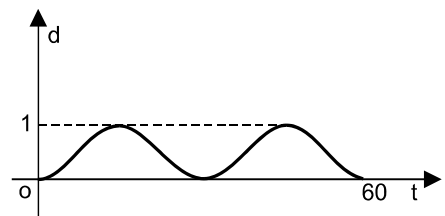
(A)



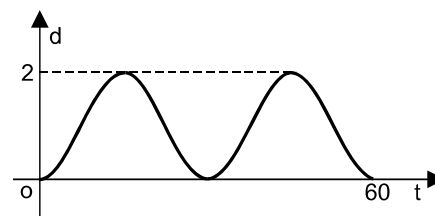
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o.n.  $xOy$ , uma parábola  $P$  tem vértice  $V(3, 6)$  e foco  $F(-1, 6)$ . Indique qual das expressões seguintes é uma equação da directriz da parábola  $P$

(A)  $x = -5$       (B)  $x = 1$       (C)  $x = 3$       (D)  $x = 7$

6. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , os planos  $\alpha$  e  $\beta$ , definidos pelas seguintes equações:

$$\alpha : x = 1 \quad \text{e} \quad \beta : y = 2$$

Seja  $r$  a recta de intersecção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Indique qual das expressões seguintes é uma equação vectorial da recta  $r$

(A)  $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(0, 0, 2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

(B)  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(1, 2, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

(C)  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k(0, 0, 2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

(D)  $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, 2, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

7. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o plano definido pela equação  $x + 2y + 3z = 10$

Para um certo número real  $m$ , a condição  $x = y - 2 = \frac{z}{m}$  define uma recta paralela ao referido plano.

Indique o valor de  $m$

(A)  $-2$       (B)  $-1$       (C)  $1$       (D)  $2$

8. Lança-se quatro vezes consecutivas um dado com as faces numeradas de 1 a 6. No primeiro lançamento sai face 1 e no segundo sai face 2.

Qual é a probabilidade de os números saídos nos quatro lançamentos serem todos diferentes?

(A)  $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4}$       (B)  $\frac{6 \times 5}{6^4}$       (C)  $\frac{6 \times 5}{6^2}$       (D)  $\frac{4 \times 3}{6^2}$

9.  $a \ b \ c \ d \ e \ f \ g$  representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão substituídos por letras.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A)  $c = {}^6C_3$       (B)  $c = {}^6C_2$       (C)  $c = {}^7C_3$       (D)  $c = {}^7C_2$

## Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 e^{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x + \text{sen } x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

1.1. Estude a função  $f$  quanto à continuidade.

1.2. Mostre que  $f$  admite um único máximo no intervalo  $] -\infty, 0[$  e determine-o.

1.3. Seja  $r$  a recta de equação  $y = 1$ .  
Mostre que existem infinitos pontos de intersecção da recta  $r$  com o gráfico de  $f$ .

2. A figura representa um reservatório com três metros de altura.

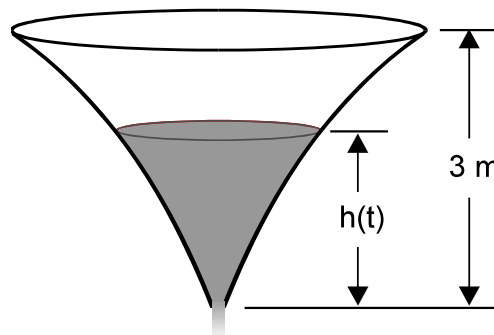
Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.

O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório,  $t$  horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$$h(t) = \log_2(a - bt), \quad t \in [0, 14],$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais positivas.



2.1. Mostre que  $a = 8$  e que  $b = \frac{1}{2}$

2.2. Prove que a taxa de variação média de  $h$  no intervalo  $[6, 11]$  é  $-0,2$ .  
Interprete este valor no contexto da situação descrita.

3. A Joana tem na estante do seu quarto três livros de José Saramago, quatro de Sophia de Mello Breyner Andresen e cinco de Carl Sagan.

Quando soube que ia passar as férias a casa da sua avó, decidiu escolher seis desses livros, para ler durante este período de lazer. A Joana pretende levar dois livros de José Saramago, um de Sophia de Mello Breyner Andresen e três de Carl Sagan.

3.1. De quantas maneiras pode fazer a sua escolha?

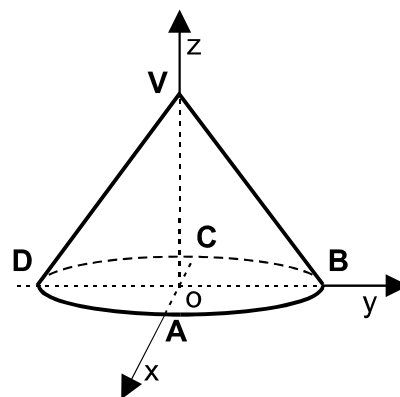
3.2. Admita agora que a Joana **já seleccionou** os seis livros que irá ler em casa da sua avó.

Supondo aleatória a sequência pela qual estes seis livros vão ser lidos, qual é a probabilidade de os dois livros de José Saramago serem lidos um a seguir ao outro? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , um cone de revolução.

Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano  $xOy$  e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$  e  $[BD]$  são diâmetros da base
- O ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$
- O ponto  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$
- O vértice  $V$  pertence ao semieixo positivo  $Oz$



4.1. Sabendo que uma equação do plano  $ABV$  é  $4x + 4y + 3z = 12$ , mostre que o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4.

4.2. Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto  $V$  e cuja intersecção com o plano  $xOy$  é a base do cone.

4.3. Designando por  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $BVD$ , determine o valor de  $\sin \alpha$ .

**FIM**

## COTAÇÕES

**Primeira Parte..... 81**

Cada resposta certa .....	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte ..... 119**

1. .... 38

1.1. .... 12

1.2. .... 15

1.3. .... 11

2. .... 25

2.1. .... 12

2.2. .... 13

3. .... 20

3.1. .... 8

3.2. .... 12

4. .... 36

4.1. .... 12

4.2. .... 12

4.3. .... 12

**TOTAL .....200**