

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1999

1.ª Fase
2.ª Chamada

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , assim definida: $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

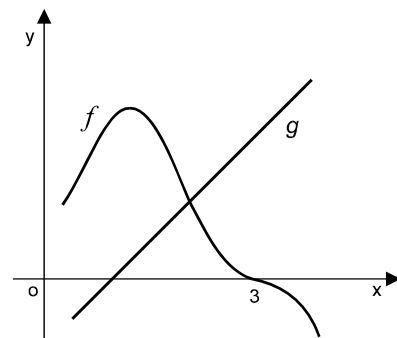
Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de (u_n)

- (A) $1 + \frac{1}{n}$ (B) $2 + \frac{2}{n}$ (C) $3 + \frac{3}{n}$ (D) $5 + \frac{1}{n}$

2. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g , contínuas em \mathbb{R} .

O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.

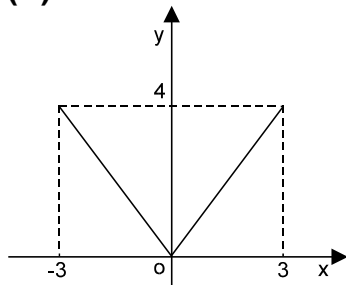
Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g(x)}{f(x)}$



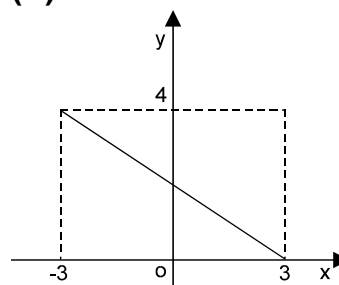
- (A) 0 (B) 1 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

3. De uma certa função f sabe-se que o seu domínio é o intervalo $[-3, 3]$ e que o seu contradomínio é o intervalo $[-4, 4]$. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $|f|$?

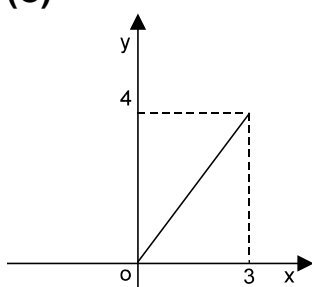
(A)



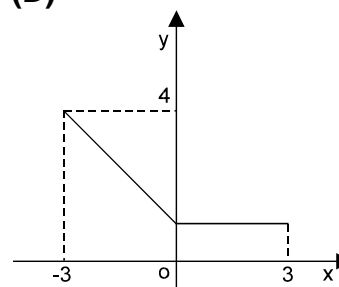
(B)



(C)



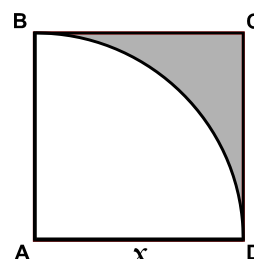
(D)



4. Na figura estão representados:

- um quadrado $[ABCD]$
- um arco de circunferência BD de centro em A

Indique qual das funções seguintes dá a área, em cm^2 , da região sombreada, em função do comprimento x , em cm , do lado do quadrado.



(A) $f(x) = \frac{4x - \pi x^2}{2}$

(B) $f(x) = \frac{(1 - \pi)x^2}{2}$

(C) $f(x) = \frac{(4 - \pi)x^2}{4}$

(D) $f(x) = \frac{\pi - 1}{4} x^2$

5. Considere uma elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 .

Seja P um ponto da elipse \mathcal{E} tal que $\overline{PF_1} = 6$ e $\overline{PF_2} = 14$.

Seja $[V_1 V_2]$ o eixo menor da elipse \mathcal{E} .

Qual é a distância de V_1 a F_1 ?

(A) 4

(B) 8

(C) 10

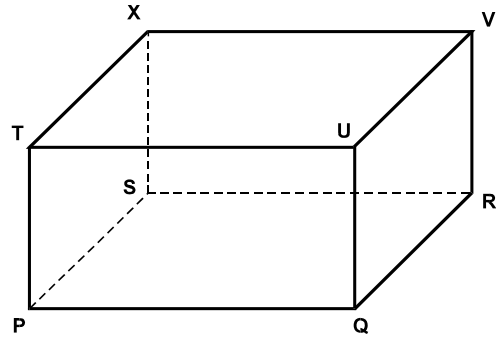
(D) 20

6. Sejam α e β dois planos perpendiculares.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) Qualquer recta paralela a α é paralela a β .
- (B) Qualquer recta paralela à intersecção de α e β é paralela a β .
- (C) Qualquer recta perpendicular a α é perpendicular a β .
- (D) Qualquer recta perpendicular à intersecção de α e β é perpendicular a β .

7. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo $[PQRSTUVX]$.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{QU} = 0$
- (B) $\overrightarrow{UQ} \cdot \overrightarrow{TX} = 0$
- (C) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{TU} = 0$
- (D) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PV} = 0$

8. O João tem num bolso do casaco uma moeda de 50\$00, duas moedas de 100\$00 e três moedas de 200\$00. Retirando duas moedas ao acaso, qual é a probabilidade de, com elas, perfazer a quantia exacta de 250\$00?

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $\frac{1}{5}$

9. Uma nova marca de gelados oferece, em cada gelado, um de três bonecos: Rato Mickey, Peter Pan ou Astérix. Sete amigos vão comprar um gelado cada um. Supondo que os três bonecos têm igual probabilidade de sair, qual é a probabilidade de o Rato Mickey sair exactamente a dois dos sete amigos?

- (A) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5$
- (B) $\frac{{}^7C_2}{7!}$
- (C) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2$
- (D) $\frac{{}^7A_2}{7!}$

Segunda Parte

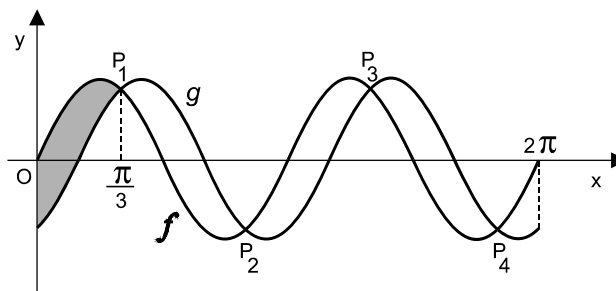
Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Na figura estão as representações gráficas de duas funções, f e g , de domínio $[0, 2\pi]$, definidas por:

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$g(x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$$



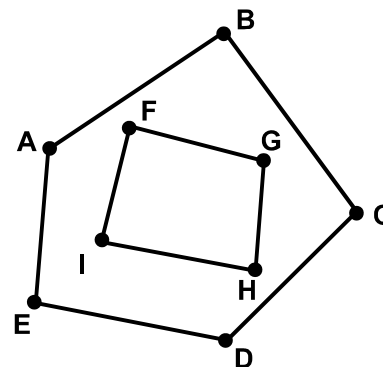
P_1 , P_2 , P_3 e P_4 são os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g .

A abcissa de P_1 é $\frac{\pi}{3}$

- 1.1. Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1
- 1.2. Determine as coordenadas de P_2
- 1.3. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.
2. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara. Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:
- $$v(t) = -3 \ln(1 - 0,005t) - 0,01t \quad (\ln \text{ significa logaritmo de base } e).$$
- A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.
- 2.1. A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem à massa do combustível. Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t \in [0, 160]$.
- 2.2. Verifique que a derivada da função v , no intervalo $[0, 160]$, é positiva e conclua qual é a velocidade máxima que o foguetão atinge neste intervalo. Apresente o resultado em quilómetros por segundo, arredondado às décimas.

3. Na figura estão representados dois polígonos:

- um pentágono $[ABCDE]$
- um quadrilátero $[FGHI]$



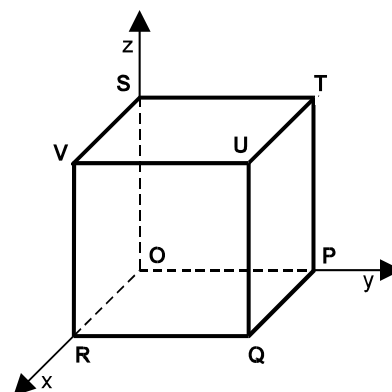
Dos nove vértices representados, não existem três colineares.

- 3.1. Determine quantos triângulos têm como vértices três dos nove pontos, de tal modo que dois vértices pertençam a um dos polígonos e o terceiro vértice pertença ao outro polígono.
- 3.2. A Sandra e o Jorge escolheram cada um, e em segredo, um dos nove vértices representados. Qual é a probabilidade de os dois vértices, assim escolhidos, pertencerem ambos ao mesmo polígono? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

4. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. $Oxyz$.

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- a face $[OSVR]$ está contida no plano xOz
- a face $[OSTP]$ está contida no plano yOz
- uma equação do plano VTQ é $x + y + z = 6$



- 4.1. Mostre que o volume do cubo é 27.
- 4.2. Determine uma equação da superfície esférica tal que:
- o centro é o simétrico de U , em relação ao plano xOy ;
 - o ponto Q pertence a essa superfície esférica.
- 4.3. Seja α o plano que contém o ponto S e é paralelo ao plano VTQ . Prove que a recta RP está contida em α .

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... 81

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 119

1.	36
1.1.	12
1.2.	12
1.3.	12

2.	25
2.1.	7
2.2.	18

3.	22
3.1.	10
3.2.	12

4.	36
4.1.	12
4.2.	12
4.3.	12

TOTAL200