

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1999

2.ª Fase

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f , definida em \mathbb{R} por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Indique o conjunto dos zeros de f .

- (A) $\{-2, 2\}$ (B) $\{-2, -1, 2\}$
(C) $\{2\}$ (D) $\{-1, 2\}$

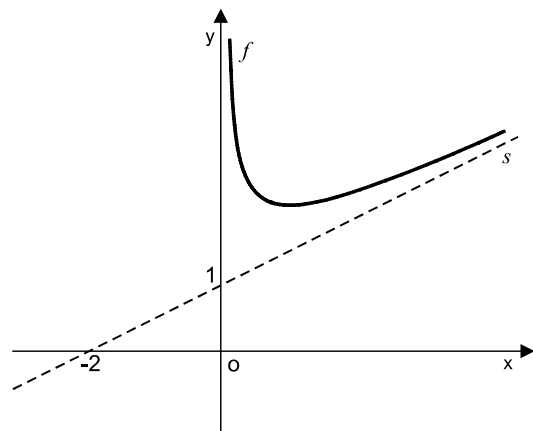
2. Indique qual das expressões seguintes define uma função **injectiva**, de domínio \mathbb{R} .

- (A) $\cos x$ (B) $x^2 - x$
(C) $|x| + 1$ (D) x^3

3. Na figura ao lado está representada graficamente uma função f , de domínio \mathbb{R}^+ .

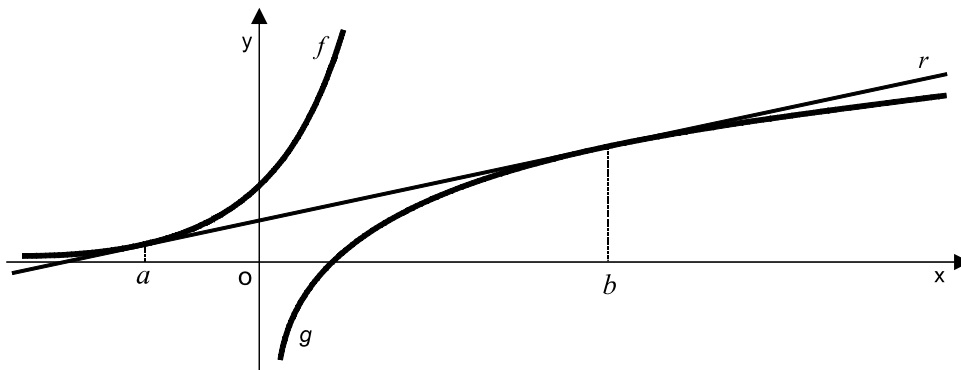
A recta s , que contém os pontos $(-2, 0)$ e $(0, 1)$, é assíntota do gráfico de f .

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$



- (A) -2 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

4. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções:
- a função f , definida em \mathbb{R} por $f(x) = e^x$
 - a função g , definida em \mathbb{R}^+ por $g(x) = \ln x$ (\ln designa logaritmo na base e)



A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa b .

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A) $e^a = \frac{1}{b}$ (B) $e^a = \ln b$ (C) $e^{a+b} = 1$ (D) $\ln(ab) = 1$

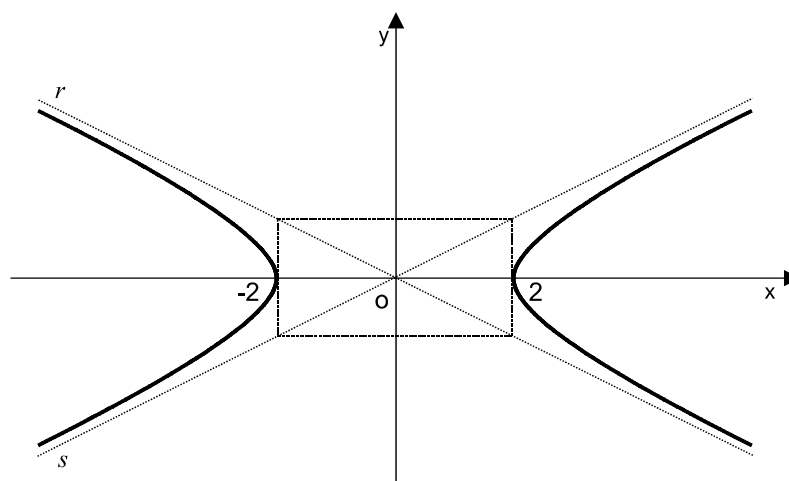
5. Num referencial o. n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma recta paralela ao eixo Oz ?

- (A) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ (B) $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
- (C) $z = 1$ (D) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

6. Num referencial o. n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 2 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \end{cases}$ define

- (A) um ponto (B) o conjunto vazio
- (C) uma recta (D) um plano

7. Na figura abaixo está representada graficamente uma hipérbole.



Os vértices da hipérbole são os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

As assíntotas da hipérbole são as rectas r e s , de equações $y = -\frac{x}{2}$ e $y = \frac{x}{2}$, respectivamente.

Qual das condições seguintes é uma equação desta hipérbole?

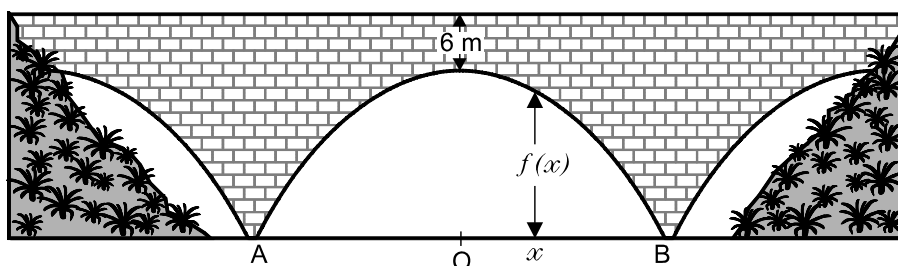
- (A) $y^2 - x^2 = 2$ (B) $x^2 - 4y^2 = 4$
(C) $2x^2 - y^2 = 8$ (D) $x^2 - y^2 = 4$
8. De quantas maneiras se podem sentar três raparigas e quatro rapazes, num banco de sete lugares, sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?
- (A) 120 (B) 240 (C) 720 (D) 5040
9. Acabou o tempo de um jogo de basquetebol, e uma das equipas está a perder por um ponto, mas tem ainda direito a dois lances livres. O Manuel vai tentar encestar. Sabendo que este jogador concretiza, em média, 70% dos lances livres que efectua e que cada lance livre concretizado corresponde a um ponto, qual é a probabilidade de o jogo terminar empatado?
- (A) 0,14 (B) 0,21 (C) 0,42 (D) 0,7

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. A figura representa uma ponte sobre um rio.



A distância mínima do **arco central** da ponte ao tabuleiro é 6 metros.

Sejam A e B os pontos de intersecção do **arco central** da ponte com o nível da água do rio, e seja O o ponto médio de $[AB]$.

Considere a recta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto situado entre A e B , de abscissa x , a altura do arco, em metros, é dada por

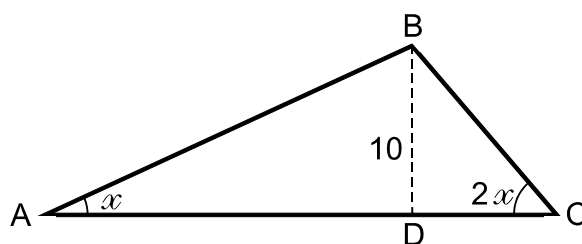
$$f(x) = 36 - 9(e^{0,06x} + e^{-0,06x})$$

- 1.1. Recorrendo ao estudo da derivada da função f , mostre que, tal como a figura sugere, é no ponto de abscissa zero que a altura do arco é máxima.
- 1.2. Uma empresa está a estudar a hipótese de construir uma barragem neste rio. Se tal empreendimento se concretizasse, o nível das águas no local da ponte subiria 27 metros.
Nesse caso, a ponte ficaria totalmente submersa? Justifique a sua resposta.
- 1.3. Mostre que a distância, em metros, entre A e B é um valor compreendido entre 43 e 44.

2. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.

Tem-se que:

- x designa a amplitude do ângulo BAC
- a amplitude do ângulo BCA é igual ao dobro da amplitude do ângulo BAC
- a altura \overline{BD} é igual a 10



Seja $g(x) = \frac{75 - 25 \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$

2.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $g(x)$, para qualquer $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

2.2. Considere o triângulo $[ABC]$ quando $x = \frac{\pi}{4}$.
Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por $g(x)$.

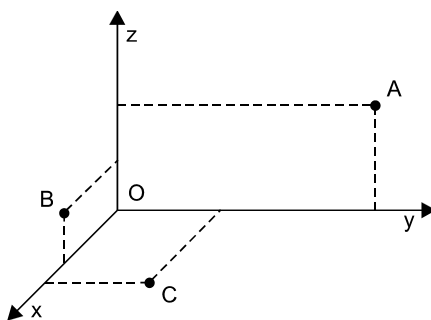
3. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados dez jogadores: dois guarda-redes, quatro defesas e quatro avançados.

3.1. Sabendo que o treinador da selecção nacional opta por que Portugal jogue sempre com um guarda-redes, dois defesas e dois avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

3.2. Um patrocinador da selecção nacional oferece uma viagem a cinco dos dez jogadores seleccionados, escolhidos ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois guarda-redes serem contemplados com essa viagem? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura estão representados três pontos, em referencial o. n. $Oxyz$



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, 5, 2)$
- o ponto B pertence ao plano xOz
- o ponto C pertence ao plano xOy
- a recta BC tem equação vectorial $(x, y, z) = (5, 4, -1) + k(1, 2, -1)$, $k \in \mathbb{R}$

4.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3, 0, 1)$ e que o ponto C tem coordenadas $(4, 2, 0)$.

4.2. Mostre que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C .

4.3. Considere a superfície esférica de centro em A , cuja intersecção com o plano xOy é uma circunferência de raio 3. Determine uma equação dessa superfície esférica.

FIM

Formulário

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

COTAÇÕES

Primeira Parte..... 81

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 119

1.	35
1.1.	12
1.2.	10
1.3.	13
2.	26
2.1.	14
2.2.	12
3.	22
3.1.	10
3.2.	12
4.	36
4.1.	12
4.2.	12
4.3.	12

TOTAL200