Exame nacional de Matemática A **(2013, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como a comissão deve ter exatamente 2 mulheres, num total de 3 pessoas, será constituída por um único homem.
   Logo, como existem 6 homens no grupo, existem 6 formas distintas de escolher o homem que integra a comissão.
   Por cada uma das 6 escolhas anteriores, existem ${}^{3}C_2$ formas de escolher 2 de entre as 3 mulheres que existem no grupo (não se considera a ordem relevante, porque não existe referência a diferentes estatutos na comissão).
   Assim, existem $6 \times {}^{3}C_2$ formas de escolher os elementos da comissão, de acordo com a restrição imposta.

   Resposta: **Opção B**

2. Sabemos que: $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = b + b = 2b$,
   e que $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = a + 2a = 3a$
   Assim $P(X > 1) = P(X < 2) \quad \Leftrightarrow \quad 2b = 3a \quad \Leftrightarrow \quad b = \dfrac{3a}{2}$
   e também $a + 2a + b + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3a + 2b = 1$

   Logo, podemos calcular os valores de a e b:

$$\begin{cases} b = \dfrac{3a}{2} \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3a}{2} \\ 3a + 2 \times \dfrac{3a}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3a}{2} \\ 3a + 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{6} \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{12} \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{4} \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

   Assim, calculando o valor médio da variável x, vem:

$$\mu = 0 \times a + 1 \times 2a + 2 \times b + 3 \times b = 0 + 2a + 2b + 3b = 2a + 5b$$

   Substituindo os valores de a e de b, temos:

$$\mu = 2 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{6} + \frac{5}{4} = \frac{1}{3} + \frac{5}{4} = \frac{4}{12} + \frac{15}{12} = \frac{19}{12}$$

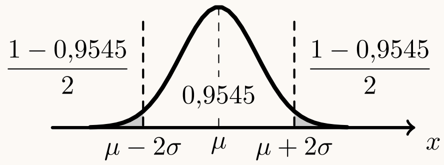
   Resposta: **Opção D**

3. Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ e $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

$$P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2} = 0{,}02275$$

Assim, $\mu + 2\sigma = 23$, e como $\mu = 11$, vem:

$$11 + 2\sigma = 23 \Leftrightarrow \sigma = \frac{23 - 11}{2} \Leftrightarrow \sigma = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \sigma = 6$$



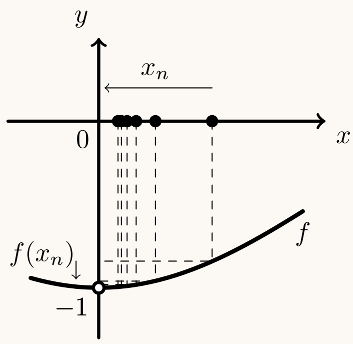
Resposta: **Opção C**

4. Como $\lim \frac{1}{n} = 0^+$, então $\lim f(x_n) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, e assim, como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$:

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= -\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que se aproximam progressivamente de -1, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

5. Como sabemos que $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, em que m é o declive de uma assíntota do gráfico de f, vem que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{3x} + \frac{f(x)}{3x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} + \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow 0 + \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

Logo uma assíntota do gráfico de f, se existir, é uma reta de declive 3, pelo que a única equação, de entre as hipóteses apresentadas, que pode definir uma assíntota do gráfico da função f é $y = 3x$

Resposta: **Opção D**

6.
- Como $f(0) = a^0 = 1$ e $g(0) = a^{-0} = a^0 = 1$, o ponto $P(0,1)$ pertence aos gráficos das duas funções, pelo que **a afirmação (I) é falsa**.
- Como $a > 1$ a função $g(x) = a^{-x}$ é estritamente decrescente, pelo que também **a afirmação (II) é falsa**.
- Como $f'(x) = \left(a^x\right)' = a^x \ln a$, logo, $f'(-1) = a^{-1}\ln a = \frac{1}{a}\ln a = \frac{\ln a}{a}$
  e como $g'(x) = \left(a^{-x}\right)' = -a^{-x}\ln a$, logo $g'(1) = -a^{-1}\ln a = -\frac{1}{a}\ln a = -\frac{\ln a}{a}$
  E assim,
  $$f'(-1) - g'(1) = \frac{\ln a}{a} - \left(-\frac{\ln a}{a}\right) = \frac{\ln a}{a} + \frac{\ln a}{a} = \frac{2\ln a}{a}$$
  pelo que **a afirmação (III) é verdadeira**.

Resposta: **Opção B**

7. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

   Assim,

   - como $8n = 4 \times 2n\mathbf{+0}$, temos que $i^{8n} = i^0 = 1$
   - como $8n - 1 = 8n - 4 + 3 = 4(2n-1)\mathbf{+3}$ temos que $i^{8n-1} = i^3 = -i$
   - como $8n - 2 = 8n - 4 + 2 = 4(2n-1)\mathbf{+2}$ temos que $i^{8n-2} = i^2 = -1$

   Temos que $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2} = i^0 \times i^3 + i^2 = 1 \times (-i) + (-1) = -i - 1$

   Logo a imagem geométrica de $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$ pertence ao terceiro quadrante.

   Resposta: **Opção C**

8. Temos que $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$
   e sabemos que: $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$, pelo que podemos escrever que $z = 10 \operatorname{cis} \alpha$

   Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{-i \times z^2}{\overline{z}} && \text{(do enunciado)} \\
&= \frac{-i \times (10^2 \operatorname{cis}(2\alpha))}{10 \operatorname{cis}(-\alpha)} && \text{(calculado } z^2 \text{ e escrevendo } \overline{z} \text{ na f.t.)} \\
&= -i \times (10 \operatorname{cis}(2\alpha - (-\alpha)) && \text{(fazendo a divisão na f.t.)} \\
&= \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \left(10 \operatorname{cis}(3\alpha)\right) && \text{(escrevendo } -i \text{ na f.t.)} \\
&= 10 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) && \text{(fazendo o produto na f.t.)} \\
&= 10 \operatorname{cis}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

   Resposta: **Opção A**

GRUPO II

1.

1.1. Começamos por simplificar a expressão de z_1 fazendo a soma na f.a.:

$$z_1 = \sqrt{2} + 2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}i$$

Escrevendo os números complexos na f.t. temos

$z_1 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$ e

$z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, porque $|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ e para $\theta = \arg(z_2)$ temos $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$ e $\theta \in 1^{\text{o}}$ Q

Assim $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

Como $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de w, aplicando a fórmula de Moivre e escrevendo w na f.a., temos que:

$w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^4 = 1^4\operatorname{cis}\left(4\times\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\pi = -1$

1.2. Temos que $z_3 = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e que $\overline{z_2} = 1 - i$, pelo que
$z_3 + \overline{z_2} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha + 1 - i = \cos\alpha + 1 + i(\operatorname{sen}\alpha - 1)$

Como $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real se $\operatorname{Im}(z_3 + \overline{z_2}) = 0$ temos que:

$$\operatorname{sen}\alpha - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{sen}\alpha = 1 \ \Leftrightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in]-2\pi, -\pi[$, seja $k = -1$, e assim $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola da caixa, e os acontecimentos:
B:≪A bola retirada é branca≫
I:≪A bola retirada tem número ímpar≫
Temos que $P\left(\overline{B}\right)=\frac{2}{5}$, $P\left(\overline{I}|\overline{B}\right)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ e $P(I|B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{I}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\right)\times P\left(\overline{I}|\overline{B}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$
- $P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
- $P(I\cap B)=P(B)\times P(I|B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$
- $P\left(B\cap\overline{I}\right)=P(B)-P(B\cap I)=\frac{3}{5}-\frac{6}{25}=\frac{9}{25}$
- $P\left(\overline{I}\right)=P\left(B\cap\overline{I}\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{I}\right)=\frac{9}{25}+\frac{2}{25}=\frac{11}{25}$

	B	$\overline{B}$	
I	$\frac{6}{25}$		
$\overline{I}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{11}{25}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, uma bola da caixa, ela ser preta, sabendo que tem um número par, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P\left(\overline{B}|\overline{I}\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap\overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}}=\frac{2}{11}$$

2.2. Como a caixa tem n bolas e 2 em cada 5 são pretas, o número de bolas pretas é $n\times\frac{2}{5}$

Logo, o número de bolas brancas é $n\times\frac{3}{5}$

Como a extração é feita sem reposição, a probabilidade da primeira bola extraída ser branca é $\frac{n\times\frac{3}{5}}{n}=\frac{3}{5}$ e a probabilidade da segunda bola ser branca, sabendo que a primeira também é branca é $\frac{n\times\frac{3}{5}-1}{n-1}$

Assim, usando a probabilidade conhecida podemos escrever e resolver a equação:

$$\frac{3}{5}\times\frac{n\times\frac{3}{5}-1}{n-1}=\frac{7}{20}\Leftrightarrow\frac{\frac{3n}{5}-\frac{5}{5}}{n-1}=\frac{35}{60}\Leftrightarrow\frac{3n-5}{5(n-1)}=\frac{35}{60}\Leftrightarrow\frac{3n-5}{n-1}=\frac{5\times35}{5\times12}\underset{n\neq1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 12(3n-5)=35(n-1)\Leftrightarrow 36n-60=35n-35\Leftrightarrow 36n-35n=60-35\Leftrightarrow n=25$$

3. Pelas leis de De Morgan, e usando o teorema do acontecimento contrário temos que $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)$, e assim $\frac{15}{16}=1-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=1-\frac{15}{16}=\frac{1}{16}$

Assim, organizando este e os restantes dados do enunciado numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
- $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\right)\times P\left(A|\overline{B}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{7}{12}=\frac{21}{48}$

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$
$\overline{B}$	$\frac{21}{48}$		$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

E assim, vem que:

$$P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{16}+\frac{21}{48}=\frac{1}{2}$$

Exame – 2013, 1ª Fase

4.

4.1. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, a função é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta $x=0$
Averiguando se $x=0$ é assíntota do gráfico de f, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0^+\times\ln(0^+)=0^+\times(-\infty)\ \text{(indeterminação)}$$

(fazendo $y=\frac{1}{x}$, temos $x=\frac{1}{y}$ e se $x\to 0^+$, então $y\to+\infty$)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times\ln\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times(\ln 1-\ln y)\right)=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times(-\ln y)\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{\ln y}{y}\right)=-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}=0$$

Temos ainda que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{e^{4x}-1}=\frac{e^0-1}{e^0-1}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{e^{4x}-1}\times\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{e^{4x}-1}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{4x}-1}=1\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{4}\times\frac{4\times x}{e^{4x}-1}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{4}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{4x}{e^{4x}-1}=$$

$$=\frac{1}{4}\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\frac{e^{4x}-1}{4x}}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{\lim_{x\to 0^-} 1}{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{4x}-1}{4x}}=\frac{1}{4\times\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{4x}-1}{4x}}=$$

(fazendo $y=4x$, temos que se $x\to 0^-$, então também $y\to 0^-$)

$$=\frac{1}{4\times\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}=\frac{1}{4\times 1}=\frac{1}{4}$$

E assim, como todos os limites calculados existem e têm um valor real (finito), podemos concluir que a função f não tem qualquer assíntota vertical.

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x>0$:

$$g'(x)=\left(f(x)-x+\ln^2 x\right)'=\left(f(x)\right)'-(x)'+\left(\ln^2 x\right)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'-1+\left(\ln(x)\times\ln x\right)'=$$
$$=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1+(\ln x)'\times\ln x+\ln x\times(\ln x)'=\ln x+1-1+2\left(\ln x\times\frac{1}{x}\right)=$$
$$=\ln x+\frac{2\ln x}{x}=\ln x\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,e]$, temos:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x\left(1+\frac{2}{x}\right)=0 \Leftrightarrow \ln x=0\vee 1+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow e^0=x\vee 1=-\frac{2}{x} \Leftrightarrow x=1\vee \underbrace{x=-2}_{-2\notin]0,e]}$$

Como g' só tem um zero no intervalo $]0,e]$ $\left(x=1\right)$, a variação do sinal da derivada e a relação com a monotonia de g é:

x	0		1		e
g'	n.d	$-$	0	$+$	$+$
g	n.d	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max

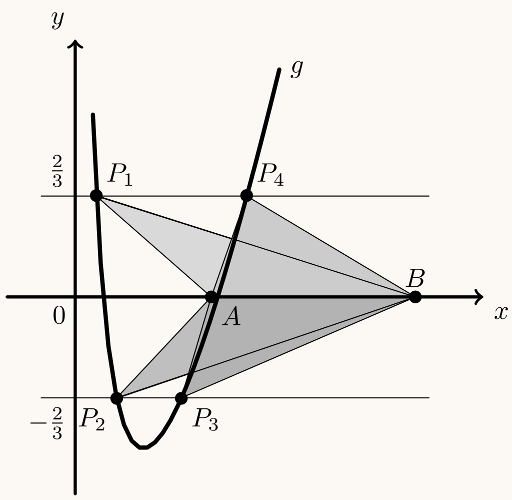
Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $]0,1]$;
- é crescente no intervalo $[1,e]$;
- tem um mínimo (cujo minimizante é 1) e um máximo (cujo maximizante é e).

4.3. Designado por a a altura do triângulo e o segmento $[AB]$ como a base do triângulo ($\overline{AB}=5-2=3$), temos que:

$A_{[ABP]}=1 \Leftrightarrow \frac{3\times a}{2}=1 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$

Ou seja os pontos P que geram triângulos de área 1 têm ordenada $\frac{2}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$, pelo que as abcissas desses pontos, são as soluções da equação $|g(x)|=\frac{2}{3}$



Representando o gráfico da função g, no domínio definido (reproduzido na figura ao lado, numa janela compatível com o domínio da função ($x>0$)), e as retas $y=\frac{2}{3}$ e $y=-\frac{2}{3}$, recorremos à função da calculadora gráfica para determinar as coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, para encontrar os valores, aproximados às centésimas, das abcissas dos quatro pontos, ou seja das soluções da equação.

Os valores aproximados das abcissas dos quatro pontos são:
$x_{P_1}\approx 0{,}31$, $x_{P_2}\approx 0{,}61$, $x_{P_3}\approx 1{,}56$ e $x_{P_4}\approx 2{,}52$

5. - Como -1 é um zero de f, temos que $g'(-1) = f(-1) \times e^{-1} = 0 \times e^{-1} = 0$, sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa -1 é uma reta de declive zero, ou seja, uma reta horizontal, o que não é compatível com o gráfico da opção (I), pelo que este gráfico não representa a função g.
   - Como $e^{-x} > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$, a função derivada (g') e a função f têm o mesmo sinal. Ou seja, a derivada é positiva apenas no intervalo $]2, +\infty[$, logo a função g é crescente apenas neste intervalo, ao contrário do que acontece com o gráfico da opção (II), pelo que este gráfico também não é o que representa a função g.
   - Como $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 2] = 0$, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota do gráfico de g. Da observação do gráfico da opção (III), verifica-se que assíntota deste gráfico é a reta $y = -2$ e não a reta $y = 2$, pelo que também não é este o gráfico da função g.

   Desta forma, o gráfico da opção (IV) é o único que pode representar a função g, uma vez que é compatível com as condições enunciadas.

6. Como sabemos que a reta tangente no ponto de abcissa a é paralela à reta $y = \frac{x}{2} + 1$, sabemos que o declive, e logo também o valor derivada é $m = g'(a) = \frac{1}{2}$.

   Logo o valor de a é a solução da equação $g'(x) = \frac{1}{2}\,,\ :\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

   Assim, começamos por determinar a expressão de g':

$$g'(x) = (\operatorname{sen}(2x) - \cos x)' = (\operatorname{sen}(2x))' - (\cos x)' = (2x)' \cos(2x) - (-\operatorname{sen} x) = 2\cos(2x) + \operatorname{sen} x$$

   Como $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$,vem:

$$g'(x) = 2\cos(2x) + \operatorname{sen} x = 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x = 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x =$$

$$= 2\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x = 2 - 4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = -4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 2$$

   Logo, resolvendo a equação $g'(a) = \frac{1}{2}$ temos:

$$-4\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen} a + 2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 3 = 0$$

   Considerando $y = \operatorname{sen} a$, e resolvendo a equação de grau 2, temos que:

$$-8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8y^2 + 2y + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)(3)}}{2(-8)} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{4} \vee y = -\frac{1}{2}$$

   Escrevendo em função de a, vem: $\operatorname{sen} a = \frac{3}{4} \ \vee\ \operatorname{sen} a = -\frac{1}{2}$

   Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $-1 < \operatorname{sen} x < 0$, logo a equação $\operatorname{sen} a = \frac{3}{4}$ é impossível.

$$\operatorname{sen} a = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ a = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ a = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ a = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

   Concretizando valores de k podemos verificamos que $a = -\frac{\pi}{6}$ é a única solução da equação que pertence ao domínio da função - $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, pelo que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = -\frac{\pi}{6}$ tem declive $\frac{1}{2}$

7. Como $f(x) = f(x+a) \Leftrightarrow f(x) - f(x+a) = 0$, mostrar que $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$ é equivalente a mostrar que uma função g, de domínio $]-a, 0[$, definida por $g(x) = f(x) - f(x+a)$ tem pelo menos um zero, visto que

$$f(x) = f(x+a) \Leftrightarrow f(x) - f(x+a) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Como a função f é contínua em $[-a,a]$ (e também em $[-a,0]$), também é em $[-a,0]$, e $f(x+a)$ é contínua em $[-a,0]$, pelo que podemos garantir que a função g é contínua em $[-a,0]$, por resultar da diferença de duas funções contínuas neste intervalo.

Como $g(0) < 0 < g(-a)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]-a, 0[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que a equação $g(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$, o que é equivalente a provar que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$

C.A.

$g(-a) = f(-a) - f(-a+a) \underset{f(-a)=f(a)}{=} f(a) - f(0)$

Como $f(a) > f(0)$, então $g(-a) > 0$

$g(0) = f(0) - f(0+a) = f(0) - f(a)$

Como $f(a) > f(0)$, então $g(0) < 0$