Exame final nacional de Matemática A (2016, 1.ª fase)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como $P\left(A|B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P\left(A|B\right) \times P(B)$ vem que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

Como $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$P\left(A \cup B\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

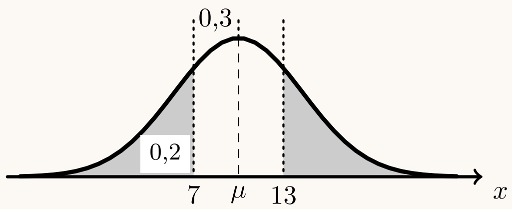
Resposta: **Opção C**

2. Atendendo às características da distribuição normal, temos que:

- $P(X < 10) = 0{,}5$
- $P(X < 7) = P(X < 10) - P(7 < X < 10) =$
  $= 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$

Logo como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio e como 7 e 13 são valores equidistantes da média ($10 - 7 = 3$ e $13 - 10 = 3$), temos que:

$$P(X > 13) = P(X < 7) = 0{,}2$$



Resposta: **Opção B**

3. Calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x \to a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} = \frac{ae^{a-a} - a}{a^2 - a^2} = \frac{a \times e^0 - a}{a - a} = \frac{a \times 1 - a}{a - a} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a} \frac{a\left(e^{x-a} - 1\right)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{a}{x+a} \times \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \frac{a}{x+a} \times \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} =$$

(fazendo $y = x - a$, temos que se $x \to a$, então $y \to 0$)

$$= \frac{a}{a+a} \times \underbrace{\lim_{y \to 0} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{a}{2a} \times 1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção B**

4. Simplificando a expressão dada, temos que:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{e^x}{x} - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0^+}{-\infty} - \lim_{x\to -\infty} 1 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 - 1 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1$$

Pelo que:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1+1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^-$, então o declive da assíntota do gráfico de f, é: $m = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

Resposta: **Opção D**

5. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:

- a base menor é a ordenada o ponto P, ou seja, $\overline{OP} = 1$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\cos\alpha > 0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ} = \cos\alpha$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\text{sen } \alpha < 0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{QR} = 1 + (-\text{sen } \alpha) = 1 - \text{sen } \alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{OP} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1 + 1 - \text{sen } \alpha}{2} \times \cos\alpha = \frac{2 - \text{sen } \alpha}{2} \times \cos\alpha =$$

$$= \frac{2\cos\alpha - \text{ sen } \alpha \cos\alpha}{2} = \cos\alpha - \frac{\text{sen } \alpha \cos\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção D**

6. Escrevendo o número complexo -3 na forma trigonométrica, vem $-3 = 3\,\text{cis}\,(-\pi)$
Desta forma, temos que:

$$z = -3\,\text{cis}\,\theta = 3\,\text{cis}\,(-\pi) \times \text{ cis}\,\theta = (3\times 1)\,\text{cis}\,(-\pi+\theta) = 3\,\text{cis}\,(\theta - \pi)$$

Logo, como $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, então $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, pelo que:

$$\pi - \pi < \theta - \pi < \frac{3\pi}{2} - \pi \Leftrightarrow 0 < \theta - \pi < \frac{\pi}{2}$$

Ou seja, $\arg(z) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, logo a imagem geométrica do número complexo z é um ponto do primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**

7. Como a soma dos ângulo internos de um triângulo é $180°$, e o triângulo é isósceles ($B\hat{A}C = A\hat{C}B$), podemos determinar a amplitude do ângulo CBA, ou seja, a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$:

$$C\hat{B}A = 180 - 2 \times 75 = 180 - 150 = 30°$$

Desta forma valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC}$ é:

$$\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA} \,\hat{}\, \overrightarrow{BC}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 30° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção C**

8. Calculando os limites das duas sucessões vem que:

- $\lim (u_n) = \lim \left(\frac{kn+3}{2n}\right) = \lim \left(\frac{kn}{2n} + \frac{3}{2n}\right) = \lim \left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right)$
  Como a sucessão $\left(\frac{3}{2n}\right)$ é um infinitésimo, então, $\lim \left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{k}{2}$
- $\lim (v_n) = \lim \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$

Assim, vem que:

$$\lim (u_n) = \lim (v_n) \;\Leftrightarrow\; \frac{k}{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; k = 2$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1. Escrevendo $-1+\sqrt{3}i$ na f.t. temos $-1+\sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis} \alpha$, onde:

   - $\rho = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
   - $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo
     $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

   Assim temos que $-1+\sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \dfrac{2\pi}{3}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z_1:

$$z_1 = \frac{8 \operatorname{cis} \theta}{2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{8}{2} \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 4 \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

   Como $\operatorname{Arg}(\overline{w}) = -\operatorname{Arg}(w)$ e $|\overline{w}| = |w|$, vem que: $\overline{z_1} = 4 \operatorname{cis} \left(-\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 4 \operatorname{cis} \left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right)$

   Logo:

$$\overline{z_1} \times z_2 = 4 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \times \operatorname{cis}(2\theta) = (4 \times 1) \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta + 2\theta\right) = 4 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)$$

   Para que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   Atribuindo valores a k, vem que:

   - Se $k=0$, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{2\pi}{3}$, $\left(\theta \notin]0,\pi[\right)$
   - Se $k=1$, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = \pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + \theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \pi - \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\left(\theta \in]0,\pi[\right)$
   - Se $k=2$, então $\operatorname{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = 2\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + \theta = 2\pi \Leftrightarrow \theta = 2\pi - \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{4\pi}{3}$, $\left(\theta \notin]0,\pi[\right)$

   Assim, o valor de $\theta \in]0,\pi[$ para o qual $\overline{z_1} \times z_2$ é um número real é $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

2.

2.1. Identificando os valores que a variável X pode assumir, e calculando as respetivas probabilidades, temos:

- 1 - correspondente à extração de duas bolas com o número 1 (1×1);
  $P(X=1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$
- 2 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 2 (1×2);
  $P(X=2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$
- 4 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 4 (1×4), ou, correspondente à extração de duas bolas com o número 2 (2×2);
  $P(X=4) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} + \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$
- 8 - correspondente à extração de uma bola com o número 2 e outra com o número 4 (2×4);
  $P(X=8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{9}$

(como só existe uma bola com o número 4, não é possível considerar a extração de duas bolas com o número 4)
Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

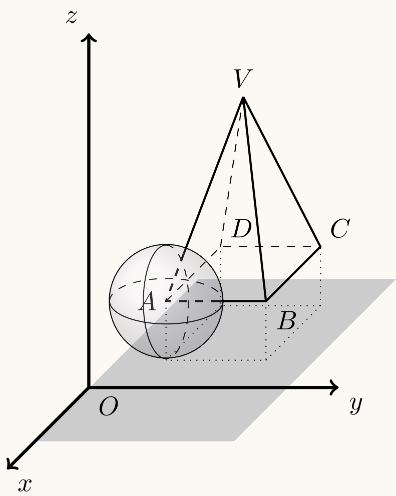
x_i	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

2.2. Para que o número seja ímpar o algarismo das unidades deve ser 1 (porque é o único número das bolas que é ímpar). Assim, dos 9 algarismos do números, apenas 8 podem ser ocupados pelas bolas com os números 2 e 4.

Selecionando 4 das 8 posições (disponíveis) do número para serem ocupadas por bolas com o número 2, temos ${}^8C_4$ hipóteses, e selecionando 1 das 4 posições disponíveis (excluindo a posição das unidades e as posições ocupadas pelas bolas com os números 4), temos ${}^4C_1 = 4$ hipóteses diferentes.
As restantes posições serão ocupadas pelas bolas com os números 1, pelo que a quantidade de números ímpares que é possível obter, é:

$${}^8C_4 \times 4 = 280$$

3.



3.1. Como o ponto A tem cota 1, está à distância 1 do plano xOy, pelo que o raio da superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy tem raio 1.

Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-(-1))^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

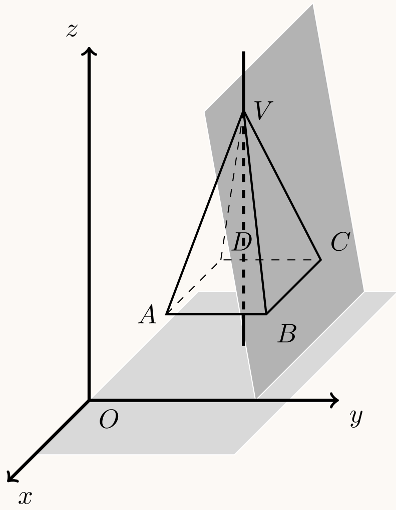
3.2. As coordenadas do ponto V podem ser determinadas pela interseção do plano BCV e da reta perpendicular à base da pirâmide que contém a projeção vertical do ponto V no plano xOy
Esta reta pode ser definida como a interseção dos planos mediadores dos segmentos $[AB]$ e $[BC]$:

$$x = -2 \ \wedge \ y = 2$$

E assim, fazendo a substituição na equação do plano BCV, calculamos a cota do ponto V:

$$3(2) + z = 10 \ \Leftrightarrow \ z = 10 - 6 \ \Leftrightarrow \ z = 4$$

Ou seja, as coordenadas do ponto V são $(-2,2,4)$



3.3. Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, temos:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,3,1) - (-1,1,1) = (-3 - (-1),3 - 1,1 - 1) = (-2,2,0)$$

Como o plano α é perpendicular à reta AC, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é um vetor normal do plano α, pelo que a equação do plano α é da forma: $\alpha : -2x + 2y + 0 \times z + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao plano α), calculamos o valor do parâmetro d, e determinamos a equação do plano α:

$$-2(1) + 2(-2) + 0 \times (-1) + d = 0 \ \Leftrightarrow \ -2 - 4 + 0 + d = 0 \ \Leftrightarrow \ -6 + d = 0 \ \Leftrightarrow \ d = 6$$

$$\alpha : -2x + 2y + 6 = 0 \ \Leftrightarrow \ -x + y + 3 = 0$$

Assim, a interseção do plano α e do plano BCV, é a reta definida por:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ \\ 3y = 10 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ \\ y = \dfrac{10 - z}{3} \end{cases}$$

Escrevendo umas equações cartesianas da reta vem:

$$x - 3 = y = \frac{10 - z}{3} \ \Leftrightarrow \ \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{-(z - 10)}{3} \ \Leftrightarrow \ \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 10}{-3}$$

Pelo que, podemos identificar um ponto da reta, $R(3,0,10)$, e um vetor diretor $\vec{u} = (1,1,-3)$. E assim, uma equação vetorial desta reta, é:

$$(x,y,z) = (3,0,10) + \lambda(1,1,-3), \lambda \in \mathbb{R}$$

4.

4.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h, para calcular os extremos da função:

$$h'(t) = \left(20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\,\text{sen}\,(2\pi t)\right)' = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right)' + \big(t\,\text{sen}\,(2\pi t)\big)' =$$
$$= 0 + \frac{1}{2\pi}\big(\cos(2\pi t)\big)' + (t)'\,\text{sen}\,(2\pi t) + t\big(\text{sen}\,(2\pi t)\big)' =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(-(2\pi t)')\,\text{sen}\,(2\pi t) + 1 \times \,\text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi t)'\cos(2\pi t) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(-2\pi)\,\text{sen}\,(2\pi t) + \,\text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi)\cos(2\pi t) =$$
$$= -\,\text{sen}\,(2\pi t) + \,\text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi)\cos(2\pi t) =$$
$$= 2\pi t\cos(2\pi t)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ([0,1]), vem:

$$2\pi t\cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \cos(2\pi t) = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\pi}{2 \times 2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, calculamos os valores de t compatíveis com o domínio da função:

- Se $k = 0$, então $t = \frac{1}{4}$
- Se $k = 1$, então $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Pelo que o conjunto dos zeros da função é $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, e assim estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
h'	0	+	0	−	0	+	+
h	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Assim, calculando o valor dos mínimos relativos e máximos relativos, temos que:

- $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi \times 0) + 0 \times \,\text{sen}\,(2\pi \times 0) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(0) + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$
- $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4} \times \,\text{sen}\,\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) =$
  $= 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = 20 + \frac{1}{4}$
- $h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{3}{4} \times \,\text{sen}\,\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) =$
  $= 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\,\text{sen}\,\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{3}{4} \times (-1) = 20 - \frac{3}{4}$
- $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi \times 1) + 1 \times \,\text{sen}\,(2\pi \times 1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 1 + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$

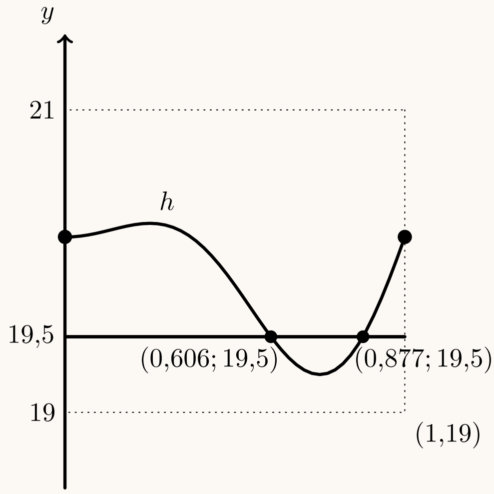
Como $h\left(\frac{3}{4}\right) < h(0)$, temos que o mínimo absoluto é $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 - \frac{3}{4} = \frac{77}{4}$

Como $h\left(\frac{1}{4}\right) > h(1)$, temos que o máximo absoluto é $M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$

E assim, o valor da amplitude de oscilação é:

$$A = M - n = \frac{81}{4} - \frac{77}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

4.2. Representando na calculadora o gráfico da função h e a reta de equação $y = 19{,}5$ na janela compatível com o domínio de h e com $y \in [19{,}21]$, obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos os valores das abcissas (com aproximação às milésimas) dos pontos do gráfico de h que têm ordenada 19,5, ou seja, os valores de a e de b:

$$a \approx 0{,}606 \text{ e } b \approx 0{,}877$$

E assim, o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, é:

$$b - a \approx 0{,}877 - 0{,}606 \approx 0{,}27$$

No contexto da situação descrita, o valor de $b-a$ é a duração do intervalo de tempo em que a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros; ou seja, que, durante o minuto em que durou a medição, o ponto P esteve a menos de 19,5 metros de distância do ponto fixo durante 0,27 minutos, aproximadamente.

5.

5.1. Temos que:

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Recorrendo à expressão algébrica função derivada de f, vem que:

$$p = f'(-1) = e^{-1}\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) = e^{-1}(1 - 1 + 1) = e^{-1} \times 1 = \frac{1}{e}$$

Logo, vem que:

$$q = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$$

Como p é o valor da função derivada de f no ponto de abcissa -1, então p é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1

E assim, o simétrico do inverso de p, ou seja, o valor de q, é o declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1

5.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(e^x\left(x^2+x+1\right)\right)' = \left(e^x\right)'\left(x^2+x+1\right) + e^x\left(x^2+x+1\right)' =$$

$$= e^x\left(x^2+x+1\right) + e^x\left(2x+1\right) = e^x\left(x^2+x+1+2x+1\right) = e^x\left(x^2+3x+2\right)$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x\left(x^2+3x+2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.}} \vee x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2,1[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty,-2[$ e no intervalo $]-1,+\infty[$
- tem dois pontos de inflexão cujas abcissas são, respetivamente, -2 e -1

6.

6.1. Como f é uma função contínua em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas definidas pelas equações $x=-1$ e $x=1$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f.
Para averiguar se estas retas são assíntotas do gráfico de f, de acordo com o domínio da função, vamos calcular:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{-1^- - 1}{-1^- + 1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{1^+ - 1}{1^+ + 1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

Como ambos os limites são infinitos, as duas retas são assíntotas do gráfico de f e não existem outras assíntotas verticais.

6.2. Determinando o declive da reta que contém os pontos de abcissas $-a$ e a, vem que:

$$m = \frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{a+a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-(a+1)}{-(a-1)}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - (-1)\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a} = \frac{f(a)}{a}$$

Logo a equação da reta é da forma $y = \frac{f(a)}{a} \times x + b$

Como o ponto de coordenadas $\big(a,f(a)\big)$ pertence à reta, podemos substituir estas coordenadas e o valor do declive, na expressão geral de uma reta, para determinar o valor da ordenada na origem:

$$f(a) = \frac{f(a)}{a} \times a + b \Leftrightarrow f(a) = f(a) + b \Leftrightarrow f(a) - f(a) = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.