GRUPO I

1. Como $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)$, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0{,}6\ \Leftrightarrow\ 1-P\left(A\cup B\right)=0{,}6\ \Leftrightarrow\ P\left(A\cup B\right)=1-0{,}6\ \Leftrightarrow\ P\left(A\cup B\right)=0{,}4$$

Como $P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \Leftrightarrow\ P\left(A\cap B\right)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$, temos que:

$$P\left(A\cap B\right)=0{,}2+0{,}3-0{,}4=0{,}1$$

E assim, vem que:

$$P\left(A|B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção A**

2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X=k)={}^{n}C_k\,p^k\,q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n=5$ (o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres).
- $p=0{,}4$ (em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é 0,4)
- $q=0{,}6$ (a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q=1-0{,}4=0{,}6$

Assim, calculando a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes, temos:

$$P(X=4)={}^{5}C_4\times 0{,}4^4\times 0{,}6^{5-4}=0{,}0768$$

Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a\left(ab^3\right)=\log_a a+\log_a\left(b^3\right)=1+3\log_a b$$

E assim, vem que:

$$\log_a\left(ab^3\right)=5\ \Leftrightarrow\ 1+3\log_a b=5\ \Leftrightarrow\ \log_a b=\frac{5-1}{3}\ \Leftrightarrow\ \log_a b=\frac{4}{3}$$

Logo, vem que:

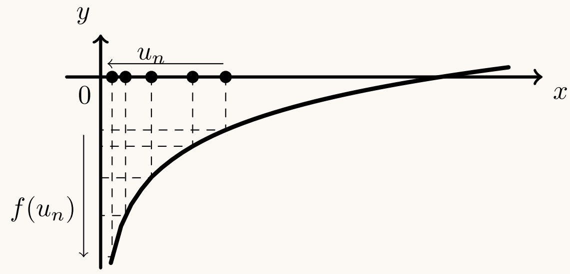
$$\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

Resposta: **Opção B**

4. Como $\lim u_n = \lim \frac{n}{e^n} = \lim \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = \frac{\lim 1}{\underbrace{\lim \frac{e^n}{n}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim f\left(u_n\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\ln x) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

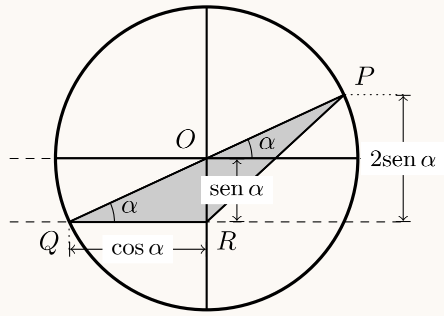


Resposta: **Opção A**

5. Observando que os ângulos AOP e RQO têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo $[PQR]$, vem que:

- $\overline{QR} = \cos\alpha$
- $\overline{OR} = \operatorname{sen}\alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado $[QR]$ é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2\operatorname{sen}\alpha$$



Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos\alpha \times 2\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

Resposta: **Opção D**

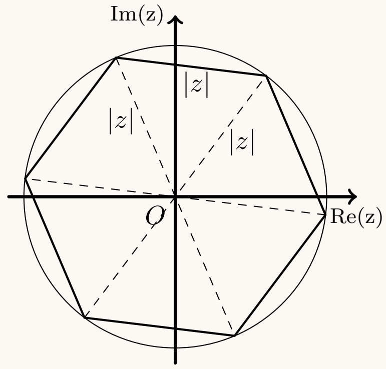
6. O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 de um qualquer número complexo, é um hexágono regular.

Como qualquer hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, temos que, o comprimento do lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito.

Assim, podemos determinar o raio da circunferência como a distância à origem do ponto que é a representação geométrica do número complexo z, ou seja $|z|$

Desta forma vem que o perímetro do hexágono regular é:

$$P_H = 6 \times |z| = 6 \times \sqrt{3^2 + 4^2} = 6 \times \sqrt{25} = 6 \times 5 = 30$$



Resposta: **Opção C**

7. Representando o quadrado definido pela condição dada, podemos verificar que o centro da circunferência é o ponto médio de uma das diagonais, ou seja o ponto :

$$C\,(2{,}3)$$

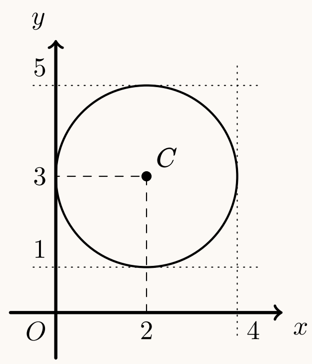
Da mesma forma, o raio da circunferência é metade do comprimento do lado:

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

E assim, temos que a equação da circunferência inscrita no quadrado é:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Resposta: **Opção C**



8. Como (u_n) é progressão geométrica (u_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $u_4 = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^{4-1} = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^3 = 32 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{32}{r^3}$
- $u_8 = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^{8-1} = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^7 = 8192 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{8192}{r^7}$

Desta forma, e como a progressão é monótona crescente, temos que a razão é positiva ($r > 0$), pelo que podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{32}{r^3} = \frac{8192}{r^7} \Leftrightarrow \frac{r^7}{r^3} = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 4$$

Logo, obtemos o quinto termo, multiplicando o quarto termo pela razão:

$$u_5 = u_4 \times r = 32 \times 4 = 128$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

1.1. No contexto da situação descrita $P(B|A)$ é a probabilidade de que, retirando uma ficha da caixa U e uma ficha da caixa V, o produto dos números das fichas retiradas seja ímpar, sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

Como se retira uma bola de cada caixa, o número de casos possíveis é 4 e correspondem a pares de bolas (em que cada uma é retirada de uma caixa) cuja soma é 10, ou seja:

$$(1{,}9);\ (2{,}8);\ (3{,}7) \text{ e } (4{,}6)$$

De entre estes pares os que correspondem a produtos ímpares são (1,9), porque $\times 9 = 9$ e (3,7), porque $3 \times 7 = 21$; (os restantes pares de números, por serem constituídos por números pares resultam num produto par).
Assim, existem 2 casos favoráveis, e, recorrendo à Regra de Laplace para o cálculo da probabilidade, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, vem:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1.2. Considerando uma única fica horizontal, existem 4 posições que devem ser ocupadas por 4 elementos (fichas com número par) diferentes e por isso cuja ordem de colocação é relevante, ou seja, são ${}^{4}A_4 = P_4 = 4!$ as formas de colocar os números pares numa única fila horizontal.
Como existem 4 filas horizontais, o número de formas que existem para dispor as fichas com números pares no tabuleiro, ocupando uma única fila horizontal é $4 \times 4!$

Após a colocação das fichas com um número par, restam $16-4=12$ posições disponíveis no tabuleiro que podem ser ocupadas por uma fichas com um número ímpar (que são diferentes e por isso é relevante a ordem de colocação), ou seja, existem ${}^{12}A_5$ formas de dispor as fichas com os números ímpares.

Assim o número de maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal é:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9\,123\,840$$

2. Escrevendo $-1+i$ na f.t. temos $-1+i = \gamma \operatorname{cis} \alpha$, onde:

- $\gamma = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

Assim temos que $-1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{4}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z:

$$z = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}{(\rho \operatorname{cis} \theta)^2} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}{\rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right)$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{2}$

Como $z = w$, então temos que:

- $|z| = |w| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \underset{\rho^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \rho^2 \Leftrightarrow 1 = \rho^2 \underset{\rho > 0}{\Rightarrow} \rho = 1$
- $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{4} - 2\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\theta = -\dfrac{3\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{3\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$

  Como $\theta \in]0,\pi[$, determinamos o valor de θ, atribuindo valores a k:

  - Se $k=0$, então $\theta = -\dfrac{3\pi}{8} \left(\theta \notin]0,\pi[\right)$
  - Se $k=-1$, então $\theta = -\dfrac{3\pi}{8} - (-\pi) = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{8\pi}{8} = \dfrac{5\pi}{8} \left(\theta \in]0,\pi[\right)$
  - Se $k=-2$, então $\theta = -\dfrac{3\pi}{8} - (-2\pi) = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{16\pi}{8} = \dfrac{13\pi}{8} \left(\theta \notin]0,\pi[\right)$

Assim, se $z = w$, $\rho > 0$ e $\theta \in]0,\pi[$, temos que $\rho = 1$ e $\theta = \dfrac{5\pi}{8}$

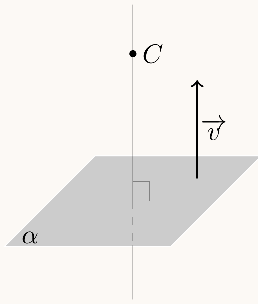
3.

3.1. Como um vetor normal de um plano define uma direção perpendicular ao plano, um destes vetores é também um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano.

Assim, como $\vec{v} = (3,2,4)$ é um vetor normal do plano α, também é um vetor diretor da reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto $C(2,1,4)$

Assim, uma equação vetorial da reta, é:

$$(x,y,z) = (2,1,4) + \lambda(3,2,4), \lambda \in \mathbb{R}$$



3.2. Como a reta OD contém a origem e o ponto D, um vetor diretor da reta OD, é:

$$\overrightarrow{OD} = D - O = (4,2,2) - (0,0,0) = (4,2,2)$$

E assim, como a reta contém o ponto $O(0,0,0)$, umas equações cartesianas desta reta, são:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

Desta forma, as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α, verificam simultaneamente a equação do plano e as equações da reta, ou seja, podem ser calculadas resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y) + 2y + 4(y) - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y + 2y + 4y = 12 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 12 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Logo o plano α e a reta OD intersectam-se no ponto de coordenadas $(2,1,1)$

3.3. Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, tem ordenada e cota nulas, ou seja as suas coordenadas são: $A(x_A,0,0)$, $x_A \in \mathbb{R}^+$
Analogamente, como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy, que tem abcissa e cota nulas e as coordenadas são $B(0,y_B,0)$, $y_B \in \mathbb{R}^+$
Da mesma forma, como o ponto P pertence ao eixo Oz, e tem abcissa e ordenadas nulas e ainda cota não nula, as coordenadas são $P(0,0,z_P)$, $z_P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como um ângulo é agudo se o produto escalar dos vetores que formam esse ângulo for positivo, então o ângulo APB é agudo se

$$\overrightarrow{PA} \, . \, \overrightarrow{PB} > 0$$

Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$, temos:

- $\overrightarrow{PA} = A - P = (x_A,0,0) - (0,0,z_P) = (x_A,0,-z_P)$
- $\overrightarrow{PB} = B - P = (0,y_B,0) - (0,0,z_P) = (0,y_B,-z_P)$

Logo, o produto escalar dos dois vetores, expressos nas suas coordenadas, é:

$$\overrightarrow{PA} \, . \, \overrightarrow{PB} = (x_A,0,-z_P) \, . \, (0,y_B,-z_P) = x_A \times 0 + 0 \times y_b + (-z_P) \times (-z_P) = 0 + 0 + {z_P}^2 = {z_P}^2$$

Como z_P é um número real, então ${z_P}^2 > 0$

Como ${z_P}^2 = \overrightarrow{PA} \, . \, \overrightarrow{PB}$, então $\overrightarrow{PA} \, . \, \overrightarrow{PB} > 0$, logo o ângulo APB é agudo.

4.

4.1. Como o domínio da função é $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 1 \times x\big) = \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \big(-\ln x\big) = -\lim_{x\to+\infty} \big(\ln x\big) = -(+\infty) = -\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f.

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(2+\operatorname{sen} x)'\cos x - (2+\operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(0+\cos x)\cos x - (2+\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, vem:

$$\frac{1+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1+2\operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{(1)} \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, vem $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6}$, e como $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{6}$

(1) Como $\cos x > 0, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, então $\cos^2 x \neq 0, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1+2\operatorname{sen} x$		$-$	0	$+$	
$\cos^2 x$		$+$	$+$	$+$	
f'	n.d.	.$-$	0	$+$	n.d.
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$;
- é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},0\right[$;
- tem um mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{6}$

4.3. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \big(x - \ln x\big)' = (x)' - \big(\ln x\big)' = 1 - \frac{(x)'}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é:

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -x + b$

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (\ln 1 - \ln 2) = \frac{1}{2} - (0 - \ln 2) = \frac{1}{2} + \ln 2$, sabemos que o ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

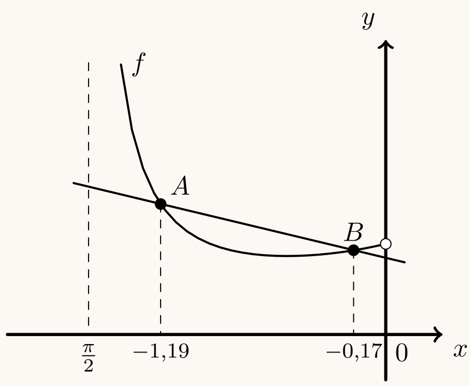
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$\frac{1}{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln 2 = b \Leftrightarrow 1 + \ln 2 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é: $y = -x + 1 + \ln 2$

Como as abcissas dos pontos A e B pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, representando na calculadora gráfica o gráfico da função f e a reta tangente ao gráfico em $x = \frac{1}{2}$, numa janela coerente com o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas dos pontos A e B:

$$x_A \approx -1{,}19 \text{ e } x_B \approx -0{,}17$$



5.

5.1. Temos que $x = 0{,}003$ e como o empréstimo será pago em prestações mensais de 24 euros então $p = 24$

Substituindo estes valores na expressão conhecida, e resolvendo a equação, vem:

$$24 = \frac{600(0{,}003)}{1 - e^{-n \times 0{,}003}} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} 24 - 24e^{-0{,}003n} = 1{,}8 \Leftrightarrow -24e^{-0{,}003n} = 1{,}8 - 24 \Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = \frac{-22{,}2}{-24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = 0{,}925 \Leftrightarrow -0{,}003n = \ln 0{,}925 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}925}{-0{,}003}$$

(1) Como $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, então $1 - e^{-0{,}003n} \neq 0$

Como $\frac{\ln 0{,}925}{-0{,}003} \approx 26$, concluímos que o José irá demorar 26 meses a pagar o empréstimo.

5.2. Calculando o valor do limite, em função de n, vem que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}=\frac{600(0)}{1-e^{-n(0)}}=\frac{0}{1-e^{0}}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\ \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-n}{-n}\times\frac{600x}{1-e^{-nx}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{-nx}{1-e^{-nx}}\right)=$$

(fazendo $y=-nx$, temos que se $x\to 0$, então $y\to 0$)

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{y}{1-e^{y}}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{y}{-(e^{y}-1)}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{n}\times\frac{y}{e^{y}-1}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{600}{n}\times=\frac{600}{n}\times\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^{y}-1}{y}}=\frac{600}{n}\times\underbrace{\frac{\lim_{y\to 0}1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}}_{\text{Lim. Notável}}=\frac{600}{n}\times\frac{1}{1}=\frac{600}{n}$$

Desta forma, se $x\to 0$, o que corresponde a uma taxa de juro arbitrariamente próxima de zero, então a prestação mensal será arbitrariamente próxima de $\frac{600}{n}$ o que corresponde a pagar o montante do empréstimo (600 euros) em n parcelas iguais, durante n meses.

6. Começamos por notar que: $g(x)=x+1\ \Leftrightarrow\ g(x)-x-1=0$

Assim, considerando $f(x)=g(x)-x-1$, temos que:
- provar que a equação $g(x)=x+1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$, é equivalente a,
- provar que a equação $f(x)=0$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$

Como, a função g é contínua em $\mathbb{R}$, então a função f também é contínua $\mathbb{R}$, porque resulta de operações sucessivas de funções contínuas, e, em particular é contínua no intervalo $[a,g(a)]$.

Cálculos auxiliares:

- $f(a)=g(a)-a-1=g(a)-(a+1)$
  Como $g(a)>a+1$, então:

  $$g(a)>a+1\ \Leftrightarrow\ g(a)-(a+1)>a+1-(a+1)\ \Leftrightarrow\ g(a)-(a+1)>0\ \Leftrightarrow\ f(a)>0\ \Leftrightarrow\ 0<f(a)$$

- Como $(g\circ g)(x)=x,\forall x\in \mathrm{R}$, então, $(g\circ g)(a)=a$, e assim:

  $$f\big(g(a)\big)=g\big(g(a)\big)-g(a)-1=(g\circ g)(a)-g(a)-1=a-g(a)-1=-g(a)+a-1$$

  Como $g(a)>a+1$, então:

  $$g(a)>a+1\ \Leftrightarrow\ -g(a)<-(a+1)\ \Leftrightarrow\ -g(a)+(a+1)<0\ \Leftrightarrow\ -g(a)+a+1-2<-2\ \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow\ -g(a)+a-1<-2\ \Leftrightarrow\ f\big(g(a)\big)<-2\ \Rightarrow\ f\big(g(a)\big)<0$$

Como $-1<0<f(a)$, ou seja, $f\big(g(a)\big)<0<f(a)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c\in]a,g(a)[$ tal que $f(c)=0$, ou seja, que a equação $f(x)=0$ tem, pelo menos, uma solução em $]a,g(a)[$, ou, de forma equivalente, que a equação $g(x)=x+1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$