Exame final nacional de Matemática A **(2018, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Temos que:

- $n = 10$ (repete-se esta experiência dez vezes).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair face com o número 3*» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem quatro faces e apenas uma delas tem o número 3).
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade de sair face como o número 3 exatamente seis vezes, e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$P(X=6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}016$$

Resposta: **Opção B**

1.2. Como a função f é diferenciável no intervalo $[0,2]$ é contínua em no mesmo intervalo.
Assim, como $\forall x \in [0,2], 0 < f'(x) < 9$ e $f(0) = 1$ pelo Teorema de Lagrange, temos que:

$$0 < f'(x) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2)-f(0)}{2-0} < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2)-1}{2} < 9 \Leftrightarrow 0 \times 2 < \frac{f(2)-1}{2} \times 2 < 9 \times 2 \Leftrightarrow$$

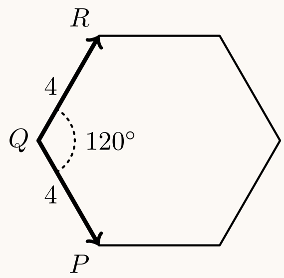
$$\Leftrightarrow 0 < f(2) - 1 < 18 \Leftrightarrow 0 + 1 < f(2) - 1 + 1 < 18 + 1 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19$$

Resposta: **Opção B**

2.

2.1. Como os segmentos de reta $[QP]$ e $[QR]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de lado 4, então temos que:

$$\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = 4$$



Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja,

$$\overrightarrow{BA}\hat{\ }\overrightarrow{BC} = 2 \times 60 = 120°$$

Assim, vem que:

$$\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{QR} = \cos\left(\overrightarrow{QP}\hat{\ }\overrightarrow{QR}\right) \times \left\|\overrightarrow{QP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = \cos(120°) \times 4 \times 4 = -\cos(60°) \times 16 = -\frac{1}{2} \times 16 = -\frac{16}{2} = -8$$

2.2. Como o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$, um vetor normal do plano é $\vec{u} = (2,3,-1)$
Como o prisma é regular então as arestas laterais são perpendiculares ao plano das bases, ou seja, a reta PS é perpendicular ao plano PQR, e assim, o vetor normal do plano da base é também um vetor diretor da reta PS, pelo que, considerando as coordenadas do ponto $S(14,5,0)$, temos que uma equação vetorial da reta PS é:

$$(x,y,z) = (14,5,0) + \lambda(2,3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta PS, e em particular o ponto P, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = P + \lambda\vec{u} = (14,5,0) + \lambda(2,3,-1) = (14 + 2\lambda, 5 + 3\lambda, -\lambda)$$

Como o ponto P pertence ao plano PQR podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(14 + 2\lambda) + 3(5 + 3\lambda) - (-\lambda) - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + \lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 14\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\lambda = -28 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-28}{14} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto P são:

$$\big(14 + 2(-2), 5 + 3(-2), -(-2)\big) = (14 - 4, 5 - 6, 2) = (10, -1, 2)$$

Assim, calculado a distância entre os pontos P e S, temos:

$$\overline{PS} = \sqrt{(14-10)^2 + (5-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$$

Assim, calculando a área lateral, ou seja, das 6 faces laterais, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$A_{\text{lateral}} = 6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} = 24\sqrt{56} \approx 179{,}6$$

2.3. Como em cada uma das bases do prisma existem 6 vértices e são escolhidos 2, o número de escolhas possíveis em cada base é ${}^6C_2$, pelo que o número total de casos possíveis é ${}^6C_2 \times {}^6C_2$
O número de casos possíveis é 6, correspondente às 6 faces laterais do prisma, compostas por quatro vértices cada.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar 2 vértices de cada base e os quatro pontos pertencerem à mesma face lateral e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$p = \frac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} \approx 0{,}03$$

3.

3.1. Como existem 4 alunos de Espanhol, que devem ficar juntos na fotografia, existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ formas de dispor os 4 alunos em 4 posições adjacentes.
Da mesma forma, como existem 8 alunos de Inglês, existem $P_8 = {}^8A_8 = 8!$ formas diferentes de os dispor em 8 posições adjacentes.
Como se pretende que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos, independentemente da ordenação das disciplinas, existem 2 formas de colocar os dois grupos (o grupo de Espanhol na direita, ou na esquerda), e assim o número total de maneiras que se podem dispor os 12 alunos nas condições descritas, é:

$$4! \times 8! \times 2 = 1\,935\,360$$

Resposta: **Opção D**

3.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
I:≪O aluno estudar Inglês≫
E:≪O aluno estudar Espanhol≫
Temos que:

- como o número de alunos que estudam Espanhol e Inglês é igual, então $P(I) = P(E)$
- como a probabilidade de um aluno estudar pelo menos uma das duas línguas é dada por $P(I \cup E)$ e como a probabilidade de um aluno estudar as duas línguas é dada por $P(I \cap E)$, logo $P(I \cup E) = 4 \times P(I \cap E)$

Podemos ainda verificar que:

$$P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E) \Leftrightarrow 4 \times P(I \cap E) = P(E) + P(E) - P(I \cap E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times P(I \cap E) + P(I \cap E) = 2 \times P(E) \Leftrightarrow 5 \times P(I \cap E) = 2 \times P(E) \Leftrightarrow P(I \cap E) = \frac{2}{5} \times P(E)$$

Desta forma, recorrendo à definição de probabilidade condicionada vem que a probabilidade, de um aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol, é:

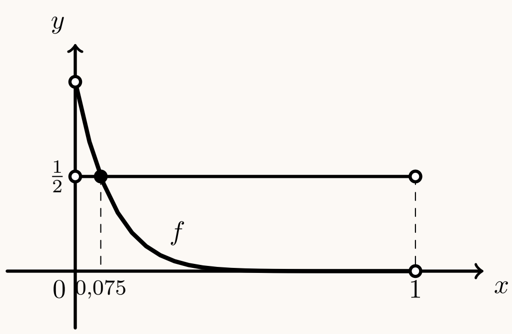
$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5} \times P(E)}{P(E)} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

O que corresponde a uma probabilidade de 40%

4. Como os coeficientes de reflexão, R, e o de absorção λ têm o mesmo valor numérico, temos que $R = \lambda$
Como a luz transmitida, L, é igual a metade da potência da luz incidente, I, temos que $L = \frac{I}{2}$
Assim, de acordo com as condições anteriores, temos que:

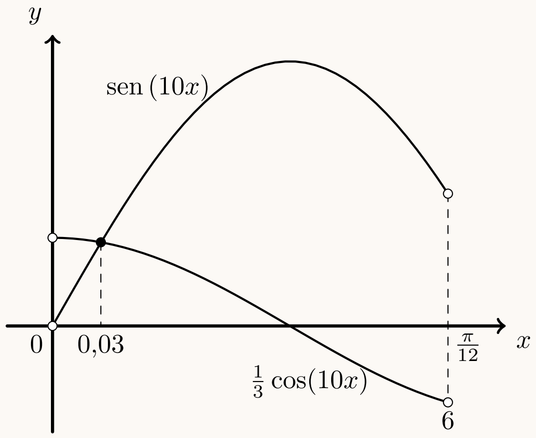
$$L = I(1-R)^6\, e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{I}{2} = I(1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{I}{2I} = (1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = (1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda}$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = (1-x)^6\, e^{-3x}$, e a reta horizontal de equação $y = \frac{1}{2}$, para $0 < x < 1$ (porque $\lambda > 0$ e $R < 1$), reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor comum aos coeficientes de absorção e reflexão do material: 0,075



5. Como $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10} = \left(e^{ix}\right)^{10} = e^{i\times 10x} = \cos(10x) + i \operatorname{sen}(10x)$, temos que $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{sen}(10x)$ e $\operatorname{Re}(z) = \cos(10x)$, pelo que o valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$ que verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$ é a solução da equação $\operatorname{sen}(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$ que pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$

Representando na calculadora gráfica os gráficos da funções $f(x) = \operatorname{sen}(10x)$ e $g(x) = \frac{1}{3}\cos(10x)$, para valores de $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor de x (arredondado às centésimas):

$$x \approx 0{,}03$$

Resposta: **Opção B**

6. Como o quociente de termos consecutivos de uma progressão geométrica é constante e igual à razão (r), temos que:

$$\frac{a+18}{a+6} = r \text{ e também que } \frac{a+6}{a} = r$$

Assim, igualando os quocientes e resolvendo a equação em ordem a a, vem:

$$\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a} \underset{a\neq 0 \wedge a \neq -6}{\Leftrightarrow} a(a+18) = (a+6)^2 \Leftrightarrow a^2 + 18a = a^2 + 12a + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a^2 + 18a - 12a = 36 \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = \frac{36}{6} \Leftrightarrow a = 6$$

Assim, como $\frac{a+6}{a} = r$, temos que $r = \frac{6+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Desta forma, podemos calcular o primeiro termo da progressão, u_1, recorrendo à fórmula da soma dos 7 primeiros termos:

$$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{-127}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 381 = u_1 \times 127 \Leftrightarrow \frac{381}{127} = u_1 \Leftrightarrow 3 = u_1$$

7. Analisando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

   - que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 2 e centro no ponto de coordenadas (0,0), ou seja, os pontos que satisfazem a condição:

   $$(x-0)^2+(y-0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4$$

   - cuja abcissa é inferior a -1 ou superior a 1, ou seja, cuja distância ao eixo das ordenadas é superior a 1, pelo que verificam a condição:

   $$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

   Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

   $$x^2+y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$$

   Resposta: **Opção C**

Caderno 2

8.

   8.1. Pela observação da condição que define a reta r, podemos observar que um vetor diretor da reta é $\vec{u}=(2,-1,0)$
   Podemos ainda verificar que um ponto que pertence à reta é o ponto de coordenadas $P(-1,2,3)$, pelo que podemos encontrar outro ponto (Q) que também pertence à reta, recorrendo ao vetor diretor:

   $$Q=P+2\vec{u}=(-1,2,3)+2(2,-1,0)=(-1+4,2-2,3+0)=(3,0,3)$$

   E assim temos que uma equação vetorial que define a reta r, é:

   $$(x,y,z)=Q+k\vec{u},k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (x,y,z)=(3,0,3)+k(2,-1,0),k\in\mathbb{Z}$$

   Resposta: **Opção A**

   8.2. Considerando que:

   - $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, temos que $\operatorname{arcsen}(1)=\frac{\pi}{2}$
   - $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$, temos que $\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

   E assim, vem que:

   $$\operatorname{arcsen}(1)+\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

   Resposta: **Opção A**

9. Simplificando a expressão de w, como $i^5 = i^{4\times 1+1} = i^1 = i$, temos que:

$$w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i^5}{1+2i} = 1 + \frac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i\right)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i - 4\sqrt{3}\,i + 2\sqrt{3}\,i^2}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,i + 2\sqrt{3}\times(-1)}{1-4i^2} = 1 + \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,i}{1-4(-1)} = 1 + \frac{-5\sqrt{3}\,i}{1+4} = 1 + \frac{-5\sqrt{3}\,i}{5} = 1 - \sqrt{3}\,i$$

Escrevendo $1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica ($w = \rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |w| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

Assim $w = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$, e como w é uma raiz quarta de z, temos que:

$$z = w^4 = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4 = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4 = 2^4 e^{4\times i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 16\,e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

Desta forma, as quatro raízes quartas de z, são: $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{-\frac{4\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$

E assim, para $k=1$, obtemos a raiz quarta de z, cuja representação geométrica pertence ao primeiro quadrante:

$$\sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{-\frac{4\pi}{3}}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{4\pi}{12} + \frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{4\pi}{12} + \frac{6\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

10.

10.1. Organizando todos os produtos possíveis numa tabela, temos:

1ª bola \ 2ª bola	0	1	2	3
0	–	0	0	0
1	0	–	2	3
2	0	2	–	6
3	0	3	6	–

Assim podemos observar que os valores que a variável X pode assumir são $k=0$, ou $k=2$, ou $k=6$

Pela observação da tabela temos que: $P(X=0) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, pelo que $k=0$

Resposta: **Opção D**

10.2. Resolvendo a equação, temos que:

$$\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln x - \ln e = 3 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 3 \Leftrightarrow \ln x = 3+1 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$$

Por outro lado, calculando o limite da sucessão, vem:

$$\lim\,(u_n) = \lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim\left(\frac{n}{n} + \frac{k}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Assim, como a solução da equação é igual ao limite da sucessão, temos que:

$$e^k = e^4 \Leftrightarrow k = 4$$

Resposta: **Opção D**

11. Simplificando a igualdade, vem que:

$$\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln\left(a^4\right) \Leftrightarrow b = a^4$$

E assim, resolvendo a inequação, temos:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq \left(a^4\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \underset{a>1}{\Leftrightarrow} x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$$

Determinando as soluções da equação $\frac{x^2-4}{x} = 0$, temos:

$$\frac{x^2-4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \land x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \land x \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \land x \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \lor x = 2$$

Estudando a variação do sinal de $\frac{x^2-4}{x}$, para $x \neq 0$, vem:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Assim, como $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} > 0$, para $a > 1$, temos que o conjunto solução de $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$ é:

$$C.S. = [-2,0[\cup [2,+\infty[$$

12.

12.1. Resolvendo a equação $g(x) = 0$ vem:

- considerando $x < 0$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \land 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \land x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln 1 \land x \neq 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \land x \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \land x \neq 0}_{\text{Cond. Imp.}}$$

Ou seja, se $x < 0$ então $g(x) = 0$ é uma equação impossível (não tem soluções).

- considerando $0 \leq x \leq \pi$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1 = 0}_{\text{Cond. Imp.}} \land 2 - \operatorname{sen}(2x) \neq 0$$

Logo, se $0 \leq x \leq \pi$ então $g(x) = 0$ também é uma equação impossível (não tem soluções).

Assim podemos concluir que a função g não tem zeros.

Resposta: **Opção A**

12.2. Para averiguar se a função g é contínua em $x=0$, temos que verificar se $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

- $g(0)=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times 0)}=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}0}=\dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}\right)=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times 0)}=\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}0}=\dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{4x}\right)=\dfrac{e^{2\times 0}-1}{4\times 0}=\dfrac{e^0-1}{0}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=2x$, temos que $4x=2y$ e se $x\to 0^-$, então $y\to 0^-$)

$$=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{2y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\times\frac{e^y-1}{y}\right)=\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Como $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x=0$

12.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, no intervalo $]0,\pi]$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)}\right)' = \frac{(1)' \times (2-\operatorname{sen}(2x)) - 1 \times (2-\operatorname{sen}(2x))'}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} =$$

$$= \frac{0 \times (2-\operatorname{sen}(2x)) - \left((2)' - (\operatorname{sen}(2x))'\right)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{0-(0-(2x)'\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} =$$

$$= \frac{-(-2\cos(2x))}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in]0,\pi]$, vem:

$$\frac{2\cos(2x)}{(2-\operatorname{sen}(2x))^2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{(2-\operatorname{sen}(2x))^2 \neq 0}_{\text{Condição universal}} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, temos que:

- para $k=-1$, $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ $\left(-\frac{\pi}{4} \notin]0,\pi]\right)$
- para $k=0$, $x = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{\pi}{4} \in]0,\pi]\right)$
- para $k=1$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\frac{3\pi}{4} \in]0,\pi]\right)$
- para $k=2$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ $\left(\frac{5\pi}{4} \notin]0,\pi]\right)$

Assim, temos que $g'(x)$ tem dois zeros em $]0,\pi]$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos(2x)$	n.d.	+	0	−	0	+	+
$(2-\operatorname{sen}(2x))^2$	n.d.	+	+	+	+	+	+
g'	n.d.	+	0	−	0	+	+
g	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Assim, podemos concluir que a função g, no intervalo $]0,\pi]$:

- é crescente no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$;
- tem um mínimo relativo para $x = \frac{3\pi}{4}$, cujo valor é:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

- tem dois máximos relativos, para $x = \frac{\pi}{4}$ e para $x = \pi$, cujos valores são respetivamente:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(\pi) = \frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\times\pi)} = \frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\pi)} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

13. Sendo $D_f =]0,\pi[$, e a função f é contínua (porque é o quociente de funções contínuas), então como $1 \in D_f$ e $\frac{\pi}{2} \in D_f$, logo $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ não são assíntotas verticais do gráfico de f

Averiguando se $x = 0$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais do gráfico de f, temos:

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$$

  Logo, a reta definida pela equação $x = 0$ não é uma assíntota vertical do gráfico de f

- $$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi^-} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

  Logo, a reta definida pela equação $x = \pi$ é uma assíntota vertical do gráfico de f

Resposta: **Opção B**

14. Determinando as coordenadas dos pontos P e Q, em função de a são, respetivamente $P\big(a,h(a)\big) = P\left(a,\frac{\ln a}{a}\right)$ e $Q\big(2a,h(2a)\big) = Q\left(2a,\frac{\ln(2a)}{2a}\right)$, temos que o declive da reta PQ é dado por:

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a}}{a} = \frac{\ln(2a) - \ln\left(a^2\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2a}{a^2}\right)}{2a^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2}$$

De acordo com a sugestão, o triângulo da figura é isósceles quando a reta PQ é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, se tem declive igual a 1.

Assim, o triângulo é isósceles se: $m_{PQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right)}{2a^2} = 1$

Desta forma, provar que existe pelo menos um valor de $a \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ a que corresponde um triângulo isósceles, é equivalente a mostrar que, dada a função $f(x) = \frac{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}{2x^2}$, definida em $\left[\frac{1}{2},1\right]$, existe $a \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, tal que $f(a) = 1$

Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left[\frac{1}{2},1\right]$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Como $\frac{\ln 2}{2} < 1 < 2\ln 4$, ou seja, $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $a \in \left]\frac{1}{2},1\right[$ tal que $f(a) = 1$.

C.A.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\ln 4}{2\times\frac{1}{4}} = \frac{\ln 4}{\frac{1}{2}} = 2\ln 4$$

Como $e < 4^2$, vem:

$e < 4^2 \Leftrightarrow \ln e < \ln(4^2) \Leftrightarrow \ln e < 2\ln(4) \Leftrightarrow 1 < 2\ln(4)$

Ou seja: $1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f(1) = \frac{\ln\left(\frac{2}{1}\right)}{2\times 1^2} = \frac{\ln 2}{2}$$

Logo, como $2 < e^2$, vem:

$$2 < e^2 \Leftrightarrow \ln 2 < \ln(e^2) \Leftrightarrow \ln 2 < 2\ln e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{2\ln e}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{2\times 1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < 1$$

Ou seja: $f(1) < 1$