

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

6 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{ou} \quad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0,-1,2)$,
respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3,-1,2)$

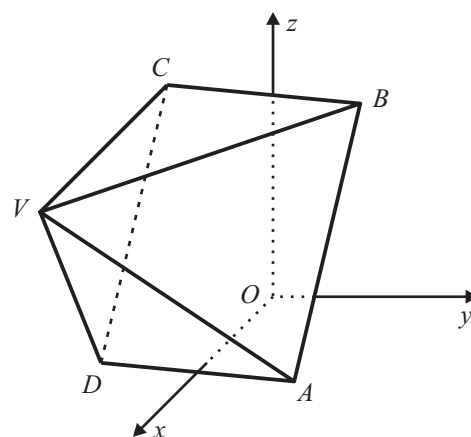


Figura 1

1.1. Determine a amplitude do ângulo VAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

1.2. Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

2.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 2.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 2.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

2.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 5 e desvio padrão $\frac{1}{2}$

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > 6)$?

(A) 0,046

(B) 0,042

(C) 0,023

(D) 0,021

PMC2015

2.2. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

(A) $\frac{1}{e^3}$

(B) e^3

(C) $\frac{1}{e^6}$

(D) e^6

3. Uma caixa contém bolas de várias cores, indistinguíveis ao tato, umas com um logotipo desenhado e outras não. Das bolas existentes na caixa, dez são amarelas. Dessas dez bolas, três têm o logotipo desenhado.

3.1. Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Sabe-se que a probabilidade de ela não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a $\frac{15}{16}$

Determine o número de bolas que a caixa contém.

3.2. Dispõem-se, ao acaso, as dez bolas amarelas, lado a lado, em linha reta.

Qual é a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas?

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{1}{13}$

4. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7

Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.

5. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto.



Figura 2

Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2 , com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.

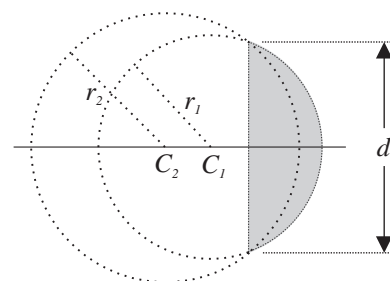


Figura 3

Seja $x = \overline{C_1 C_2}$

Sabe-se que o diâmetro, d , da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{[(r_1 + r_2)^2 - x^2]} \sqrt{x^2 - (r_1 - r_2)^2}}{x}, \text{ com } r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x , entre os centros das duas superfícies esféricas. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x , sabendo-se que esse valor é único no intervalo $]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}[$

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

6. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z = -1 + 2i$

Seja θ o menor argumento positivo do número complexo \bar{z} (conjugado de z).

A qual dos intervalos seguintes pertence θ ?

- (A) $]0, \frac{\pi}{4}[$ (B) $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ (C) $]\pi, \frac{5\pi}{4}[$ (D) $]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[$

7. Seja r um número real maior do que 1

Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos.

Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3

Determine o valor de r

8. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$

Sabe-se que $a + b = 2(a - b)$

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b)$?

- (A) 0,7 (B) 1,4 (C) -0,7 (D) -1,4

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.	6.	7.	8.	
12	12	8		13	8	12	12	8	12	8	105

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
Não é permitido o uso de calculadora.

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α , β e γ , definidos pelas equações $x + y + z = 1$, $2x + 2y + 2z = 1$ e $x + y = 0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α , β e γ é

- (A) o conjunto vazio. (B) um ponto. (C) uma reta. (D) um plano.

PMC2015

9.2. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy , uma elipse e um círculo, ambos centrados na origem do referencial. Os focos da elipse, F_1 e F_2 , pertencem ao eixo Ox

Sabe-se que:

- a distância focal e o eixo menor da elipse são iguais ao diâmetro do círculo;
- a área do círculo é igual a 9π

Qual das equações seguintes é a equação reduzida da elipse?

- (A) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ (B) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{9} = 1$
(C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$

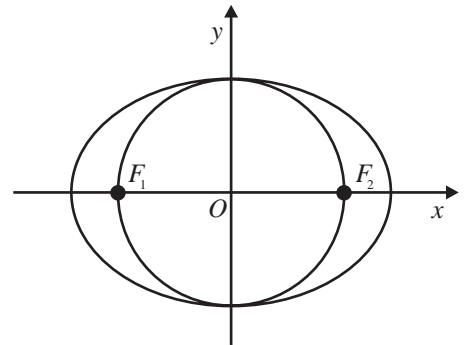


Figura 4

10. Considere em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 4 + 6i$

Seja $w = \frac{z_1 + i^6 + 2\overline{z_1}}{z_1 - z_2}$

No plano complexo, a condição $|z| = |w| \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0$ define uma linha.

Determine o comprimento dessa linha.

11. Qual é a solução da equação $2 \cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

- (A) $-\frac{5\pi}{6}$ (B) $-\frac{2\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{\pi}{6}$

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem uma face numerada com o número -1 e cinco faces numeradas com o número 1

Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nos dois lançamentos».

Qual é o valor de k para o qual $P(X = k) = \frac{5}{18}$?

- (A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) -1

PMC2015

12.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 10]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 3 \cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, com $t \in I$

Qual é o período, em segundos, deste oscilador harmónico?

- (A) 2 (B) 3 (C) 2π (D) 3π

13. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

13.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1

13.2. Averigue se a função f é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

14.1. Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

14.2. Seja h a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1

(B) 2

(C) e

(D) e^2

15. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy , os pontos A e B , de abscissas positivas, e as retas OB e r

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- a reta OB é definida pela equação $y = \frac{4}{3}x$
- a reta r contém a bissetriz do ângulo AOB

Determine a equação reduzida da reta r

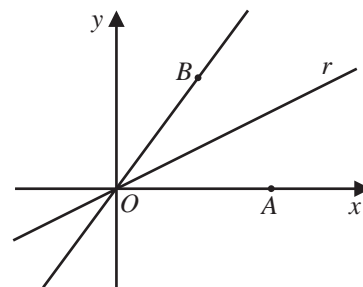


Figura 5

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
9.1.	9.2.	10.	11.	12.1.	12.2.	13.1.	13.2.	14.1.	14.2.	15.	
8		13	8	8		13	14	13	8	10	95

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	200
--------------------------------------	------------