Exame final nacional de Matemática A **(2020, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8(n+1)-4}{(n+1)+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+4}{n+2}_{\,(n+1)} - \frac{8n-4}{n+1}_{\,(n+2)} = \frac{(8n+4)(n+1)-(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{8n^2+8n+4n+4-\left(8n^2+16n-4n-8\right)}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+8n+4n+4-8n^2-16n+4n+8}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{12n+4-12n+8}{(n+2)(n+1)} = \frac{12}{(n+2)(n+1)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+2)(n+1) > 0$, e como o quociente de dois números positivos (12 e $(n+2)(n+1)$) é um valor positivo, temos que:

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

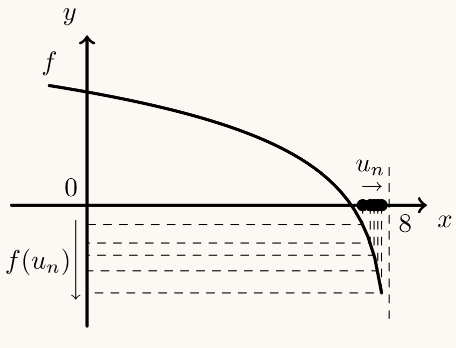
Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona crescente**.

1.2. Como $\lim u_n = \lim \left(\frac{8n-4}{n+1}\right) = \lim \left(\frac{8n}{n}\right) = 8$ e (u_n) é uma monótona crescente, então $\lim u_n = 8^-$

E assim, vem que:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to 8^-} f(x) = \log_2(8-8^-) = \log_2(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

2. Como cada uma das 4 pessoas escolhe um de entre 5 números, podendo ocorrer repetições, o número de escolhas diferentes que podem ocorrer, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^5A'_2 = 5^4$

   Como duas pessoas devem escolher o número cinco, e as restantes um número dos restantes 4, o número de escolhas que obedecem a esta condição, ou seja, o número de casos favoráveis, é $1^2 \times 4^2 \times {}^4C_2$, onde ${}^4C_2$ permite calcular o número de posições diferentes das 2 pessoas que escolhem o número cinco na sequência das 4 pessoas.

   Assim a probabilidade de exatamente duas delas das cinco pessoas escolherem o número 5, é:

$$\frac{4^2 \times {}^4C_2}{5^4} = 0{,}1536$$

   Resposta: **Opção D**

3.

   3.1. Podemos observar que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{1}{3}$$

   E assim, designando por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco, temos que o número de bolas brancas na segunda extração, sabendo que a primeira bola extraída foi azul, é b e o número total de bolas é $a - 1 + b$

   Assim, como a probabilidade de retirar uma bola branca na segunda extração, sabendo que foi retirada uma bola azul na primeira extração, é $\frac{1}{3}$, temos que:

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{a-1+b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a - 1 + b \Leftrightarrow 3b - b + 1 = a \Leftrightarrow 2b + 1 = a$$

   Desta forma, como b é um número natural, $2b+1$ é um número ímpar, ou seja, a, o número de bolas azuis que inicialmente existia no saco era ímpar.

   3.2. Como cada uma das 5 caixas com número par deve ter, pelo menos, uma bola azul e existem 8 bolas azuis, restam $8 - 5 = 3$ bolas azuis para colocar como uma segunda bola.

   Como cada uma das 5 caixas com número ímpar deve ter, pelo menos, uma bola branca e existem 7 bolas brancas, restam $7 - 5 = 2$ bolas brancas para colocar como uma segunda bola.

   Desta forma podemos selecionar quaisquer duas das 10 caixas para colocar as duas bolas brancas, a que correspondem ${}^{10}C_2$ escolhas diferentes; e depois, por cada uma destas escolhas, devemos escolher 3 das restantes 8 caixas (porque nenhuma pode conter mais do que duas bolas), para colocar as 3 bolas azuis restantes, a que correspondem ${}^8C_3$

   Assim, o número de maneiras diferentes em podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas, nas condições indicadas, é:

$${}^{10}C_2 \times {}^8C_3 = 2520$$

   Resposta: **Opção B**

4.

4.1. Considerando $z = \rho e^{i\theta}$, temos que:

$$z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim temos que:

- $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho^2 - \rho = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho = 1$
- $2\theta = -\theta + 2k\pi \Leftrightarrow 2\theta + \theta = 2k\pi \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, três soluções não nulas da equação ($\rho \neq 0$), com afixos diferentes, são:

- $z_1 = e^{i(0)}$ $(\rho = 1 \wedge k = 0)$
- $z_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ $(\rho = 1 \wedge k = 1)$
- $z_3 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ $(\rho = 1 \wedge k = 2)$

(As restantes soluções não nulas da equação, associadas a outros valores de k, têm afixos iguais a um dos três apresentados).

Logo, escrevendo duas das soluções apresentadas na forma algébrica, vem:

- $z_1 = e^{i(0)} = e^0 = 1$
- $z_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Logo, como os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular, ou seja de um triângulo equilátero, temos que respetivo o perímetro é dado pelo triplo da medida do lado, que, por sua vez, é a distância entre dois afixos, ou seja:

$$P = 3 \times |z_1 - z_2| = 3 \times \left|1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = 3 \times \left|1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 3 \times \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| =$$

$$= 3 \times \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 3\sqrt{\frac{12}{4}} = 3\sqrt{3}$$

4.2. Observando a condição, temos que:

$$\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}$$

Ou seja, o conjunto de afixos que verificam a condição, são os afixos de números complexos, cujas partes real e imaginária são inversamente proporcionais, ou seja, o conjunto de pontos é uma hipérbole.

Podemos ainda verificar que estes afixos pertencem ao 1.º e 3.º quadrantes, porque os números complexos correspondentes têm as partes real e imaginária, ambas positivas, ou ambas negativas.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única onde pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição, é a opção D.

Resposta: **Opção D**

5.

5.1. Determinando as coordenadas dos pontos A e B, com recurso à equação que define o plano ABC, temos:

- Como o ponto A pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, e assim, a sua abcissa é:

$$3x + 4(0) + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

- Como o ponto B pertence ao eixo Oy, tem abcissa e cota nulas, e assim, a sua ordenada é:

$$3(0) + 4y + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 + 4y + 0 = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{4} \Leftrightarrow y = 3$$

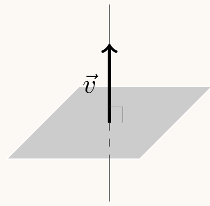
Assim, as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, $(4,0,0)$ e $(0,3,0)$ e a distância $\overline{AB}$, ou seja, a altura do cilindro, é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Como o volume do cilindro (V_C) é igual a 10π podemos determinar $\overline{BC}$, ou seja, a medida do raio da base do cilindro:

$$V_C = \pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} \Leftrightarrow 10\pi = \pi \times \overline{BC}^2 \times 5 \Leftrightarrow \frac{10\pi}{5\pi} = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = \sqrt{2}$$

5.2. Designado por Q o ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P, então a reta PQ é perpendicular ao plano ABC, pelo que o vetor normal do plano ABC ($\overrightarrow{v} = (3,4,4)$)é também um vetor diretor da reta PQ. Assim, temos que uma equação vetorial da reta PQ, é:



$$(x,y,z) = P + \lambda\overrightarrow{v}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta PQ, e em particular o ponto do ponto Q, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4) = (3+3\lambda,5+4\lambda,6+4\lambda)$$

Como o ponto Q pertence ao plano ABC podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(3+3\lambda) + 4(5+4\lambda) + 4(6+4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 9\lambda + 20 + 16\lambda + 24 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41\lambda = 12 - 9 - 20 - 24 \Leftrightarrow 41\lambda = -41 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{41}{41} \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$\big(3+3(-1),5+4(-1),6+4(-1)\big) = (3-3,5-4,6-4) = (0,1,2)$$

6. Como o declive da reta é a tangente da inclinação ($m = \operatorname{tg} O\hat{T}S$), ou seja:

$$\operatorname{tg} O\hat{T}S = 2 \Rightarrow O\hat{T}S = \operatorname{tg}^{-1}(2)$$

Como o ponto S pertence ao eixo Oy e tem abcissa inferior à do ponto T $S\hat{T}U$ e $O\hat{T}S$ são ângulos suplementares, ou seja:

$$S\hat{T}U + O\hat{T}S = \pi \text{ rad}$$

E assim, recorrendo à calculadora, temos que:

$$S\hat{T}U + \operatorname{tg}^{-1}(2) = \pi \Leftrightarrow S\hat{T}U = \pi - \operatorname{tg}^{-1}(2) \Rightarrow S\hat{T}U \approx 2{,}03 \text{ rad}$$

Resposta: **Opção C**

7.

7.1. Como quando o movimento de rotação da manivela se inicia, o pistão se encontra na posição B, a distância do pistão ao ponto O, zero segundos, após o instante em que é iniciado o movimento, é dada por:

$$\overline{OP} = \overline{OB} = d(0)$$

Assim, o comprimento da biela, em centímetros, é:

$$\overline{OB} - \overline{OM} = d(0) - 1 = \cos(0) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(0)} - 1 = 1 + \sqrt{9-0} - 1 = 3$$

Resposta: **Opção B**

7.2. Temos que no instante t_0, a distância do pistão ao ponto O é $d(t_0)$ e passados 2 segundos, a distância é dada por $d(t_0+2)$

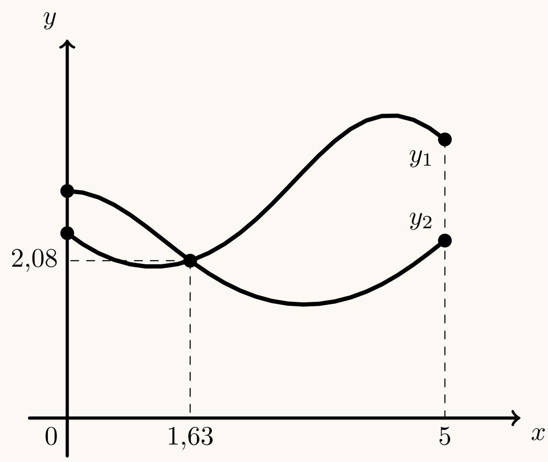
Como nestes dois segundos a distância diminuiu 25%, ficou reduzida a 75% do valor anterior, ou seja:

$$d(t_0+2) = 0{,}75d(t_0)$$

Desta forma simplificando a equação temos:

$$d(t_0+2) = 0{,}75d(t_0) \Leftrightarrow \cos(t_0+2) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(t_0+2)} = 0{,}75\big(\cos(t_0) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(t_0)}\big)$$

Visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $y_1 = \cos(x+2) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(x+2)}$, e $y_2 = 0{,}75\big(\cos(x) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(x)}\big)$, para $0 \leq x \leq 5$ (porque a situação descrita se reporta aos primeiros 5 segundos do movimento), reproduzidos na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado com duas casas decimais das coordenadas do ponto de interseção $(1{,}63; 2{,}08)$



Assim, temos que $t_0 \approx 1{,}63$ e que a distância correspondente, arredondada às décimas, é:

$$d(1{,}63) \approx \cos(1{,}63) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(1{,}63)} \approx 2{,}8 \text{ cm}$$

8. Como o ponto A está sobre a reta definida pela equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica, então a ordenada do ponto A é $y_A = \operatorname{tg}\alpha = a$, sendo α o ângulo definido pelo semieixo positivo Ox e pela semireta $\dot{O}A$

Como o ponto B pertence à circunferência trigonométrica, tem coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, ou seja, a abcissa do ponto B é $x_B = \cos\alpha$

Desta forma, como $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, e $\cos\alpha \neq 0$, temos que a abcissa do ponto B:

$$1 + a^2 = \frac{1}{{x_B}^2} \Leftrightarrow {x_B}^2 = \frac{1}{1+a^2} \underset{x_B>0}{\Leftrightarrow} x_B = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} \Leftrightarrow x_B = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

Resposta: **Opção A**

9.

9.1. Como a função está definida em $]-\infty,2]$, começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de f, quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) = 1 + \frac{\ln(e^{-\infty}+1)}{-\infty} = 1 + \frac{\ln(0^+ +1)}{-\infty} = 1 + \frac{0^+}{-\infty} = 1 - 0 = 1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \ln(e^x+1) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^x+1)\right) =$$

$$= \ln(e^{-\infty}+1) = \ln(0^+ +1) = \ln 1 = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de f é:

$$y = x + 0 \Leftrightarrow y = x$$

9.2. Resolvendo a equação dada, para $x \in]-\infty,2]$, temos:

$$f(x) = 2x+1 \Leftrightarrow x + \ln(e^x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = -x+2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x \times e - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x(e-1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

Apresentando a única solução na forma $-\ln k$, $k > 0$, vem:

$$\ln\left(\frac{1}{e-1}\right) = \ln\left((e-1)^{-1}\right) = (-1)\ln(e-1) = -\ln(e-1) \quad \left(\text{como } e > 1\text{, então } e-1 > 0\right)$$

9.3. Resolvendo a equação $y = f(x) - x$ em ordem a x, para determinar a expressão algébrica da função h^{-1}, temos:

$$y = f(x) - x \Leftrightarrow y = x + \ln(e^x+1) - x \Leftrightarrow y = \ln(e^x+1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^y - 1 = e^x \Leftrightarrow \ln(e^y - 1) = x$$

Desta forma temos que, para $x \in]-\infty,2]$, $h^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$

Resposta: **Opção C**

10.

10.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$

- $g(0) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 \ln x\right) = 0 \times (-\infty)$ (Indeterminação)

  (fazendo $y = \frac{1}{x}$, temos $x = \frac{1}{y}$ e se $x \to 0^+$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^2 \ln x\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(\left(\frac{1}{y}\right)^2 \times \ln \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(\frac{1}{y^2} \times (\ln 1 - \ln y)\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(-\frac{\ln y}{y^2}\right) =$$

$$= -\lim_{y\to +\infty} \left(\frac{\ln y}{y^2}\right) = -\lim_{y\to +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \times \frac{1}{y}\right) = -\underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y} = -0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0^+ = 0$$

- $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x}\right) = 1 + \frac{\operatorname{sen} 0}{1 - e^0} = 1 + \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x}\right) = \lim_{x\to 0^-} 1 + \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} = 1 + \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{-(-1 + e^x)} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{-\frac{e^x - 1}{x}} = 1 + \frac{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{e^x - 1}{x}\right)} = 1 + \frac{\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{-\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$$

Como $g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x)$, a função g é contínua em $x = 0$

10.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, em $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \left(x^2 \ln x\right)' = (x^2)' \times \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} \underset{x\neq 0}{=} 2x \ln x + x$$

Calculando os zeros da derivada da função g, em $]0, +\infty[$, temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{0\notin]0,+\infty[}{x = 0} \vee 2\ln x + 1 = 0 \Rightarrow 2\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
g'	n.d.	$-$	0	$+$
g	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função g:

- é decrescente no intervalo $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$;
- é crescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$;
- tem um mínimo relativo que é:

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \ln e = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = -\frac{1}{2e}$$