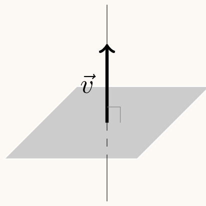
Exame final nacional de Matemática A **(2020, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como o plano EFG é perpendicular à reta AE, o vetor diretor da reta ($\vec{v} = (3, -6,2)$) é um vetor normal do plano, assim a equação do plano é da forma:

$$3x - 6y + 2z + d = 0$$



E como o ponto G pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

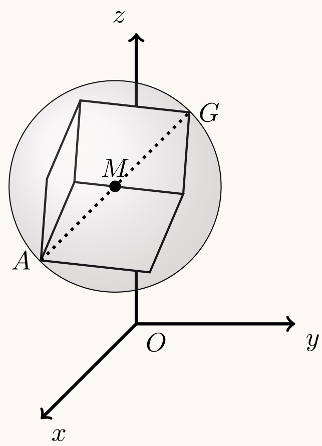
$$3(5) - 6(3) + 2(6) + d = 0 \Leftrightarrow 15 - 18 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

E assim, uma equação do plano EFG, é:

$$3x - 6y + 2z - 9 = 0$$

1.2. Como a superfície esférica de contém os oito vértices do cubo, o respetivo centro está a igual distância de todos os vértices, em particular dos vértices A e G, pelo que o centro é o ponto médio do segmento $[AG]$, e as suas coordenadas podem ser obtidas a partir das coordenadas dos extremos do segmento de reta:

$$\left(\frac{5+7}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = \left(\frac{12}{2}, \frac{4}{2}, \frac{10}{2}\right) = (6,2,5)$$



Como $[AG]$ é um diâmetro da superfície esférica, e o raio é metade do diâmetro, temos que:

$$r = \frac{\overline{AG}}{2} = \frac{\sqrt{(5-7)^2 + (3-1)^2 + (6-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

E assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2 = \frac{12}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 3$$

2. Como o cubo tem 8 vértices, o número de conjuntos de 3 vértices que podem ser escolhidos (número de casos possíveis) é ${}^8C_3$
Como cada face tem 4 vértices, o número de grupos de 3 vértices que definem essa face ${}^4C_3$, e como o cubo tem 6 faces, o número de grupos de 3 vértices que definem um plano que contenha uma face, ou seja o número de casos favoráveis, é $6 \times {}^4 C_3$.
Desta forma, a probabilidade é:
$$\frac{6 \times {}^4 C_3}{{}^8C_3} = \frac{3}{7}$$
Resposta: **Opção B**

3. De acordo com os acontecimentos A e B definidos, e os dados do enunciado, temos que:
   - $P(A) = 0{,}3$
   - $P(B) = 0{,}4$
   - $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}9$

   Assim, usando as Leis de De Morgan, e o teorema do acontecimento contrário, temos que:
$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0{,}9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$$
   E assim, podemos calcular $P(A \cup B)$:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}6$$
   Como $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$, porque $(A \cap B) \subset A$, então, usando a definição de probabilidade condicionada, podemos calcular $P\big(A|(A \cup B)\big)$, e apresentar o resultado na forma de fração irredutível:
$$P\big(A|(A \cup B)\big) = \frac{P\big(A \cap (A \cup B)\big)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. Como os números devem ser naturais, superiores a 9999 e inferiores a 22 000, então todos têm 5 algarismos, usando apenas os algarismos 0, 1, 2 ou 3.

   O algarismo das dezenas de milhar tem que ser 1 ou 2 (não pode começar por zero e deve ser inferior a 30 000).

   Se o algarismo das dezenas de milhar for 1, então os restantes 4 podem ser escolhidos de entre as 4 alternativas, sem restrições, com repetição e considerando relevante a ordem, ou seja, de ${}^4A'_4 = 4^4 = 256$ formas diferentes.

   Se o algarismo das dezenas de milhar for 2, então o algarismo dos milhares tem que ser 0 ou 1 (2 opções), para que o número seja inferior a 22 000 e os restantes 3 podem ser escolhidos de entre as 4 alternativas, sem restrições, com repetição e considerando relevante a ordem, ou seja, existem $2 \times {}^4 A'_3 = 2 \times 4^3 = 2 \times 128$ números diferentes nestas condições.

   Assim, a quantidade de números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000 escritos usando apenas os algarismos 0, 1, 2 e 3 é:
$${}^4A'_4 + 2 \times {}^4 A'_3 = 256 + 128 = 384$$
   Resposta: **Opção C**

5. Designando por a e b os dois números reais positivos, e usando as propriedades dos logaritmos, podemos determinar o produto ab:

$$\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(a \times b) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow ab = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow ab = 2$$

Resposta: **Opção A**

6. Como o sétimo termo da progressão aritmética é igual ao dobro do segundo, designado a razão por r, temos que:

$$u_7 = 2 \times u_2 \Leftrightarrow u_1 + (7-1) \times r = 2(u_1 + r) \Leftrightarrow u_1 + 6r = 2u_1 + 2r \Leftrightarrow 6r - 2r = 2u_1 - u_1 \Leftrightarrow 4r = u_1$$

Como a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4r + 4r + 11r) \times \frac{12}{2} = 19r \times 6 = 114r$$

Como a soma dos doze primeiros termos é 57, temos que:

$$S_{12} = 57 \Leftrightarrow 114r = 57 \Leftrightarrow r = \frac{57}{114} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Logo, $u_1 = 4r = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ e $u_n = 2 + \frac{n-1}{2}$, pelo que a ordem do termo 500, é a solução da equação $u_n = 500$:

$$u_n = 500 \Leftrightarrow 2 + \frac{n-1}{2} = 500 \Leftrightarrow \frac{n-1}{2} = 500 - 2 \Leftrightarrow n - 1 = 498 \times 2 \Leftrightarrow n = 996 + 1 :\Leftrightarrow n = 997$$

Ou seja, a ordem do termo 500 é 997, isto é, $u_{997} = 500$

7. Observando que $\lim v_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$, podemos garantir que o limite da sucessão não é nulo, e também que a sucessão não é divergente.

Verificando que $v_1 = 1$, $v_9 = 9$ e $v_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1$, temos que $v_1 < v_9$ e que $v_9 > v_{10}$, é possível afirmar que a sucessão não é monotóna.

Desta forma, de entre as opções apresentadas a única afirmação verdadeira é que a sucessão é limitada, o que pode ser confirmado atendendo a que:

- a representação gráfica dos primeiros nove termos da sucessão são pontos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja $1 \leq v_n \leq 9, \forall n \leq 9$
- a representação gráfica dos restantes termos da sucessão são pontos sobre uma hipérbole tal que $v_n > 1, \forall n \geq 10$

ou seja, $1 \leq v_n \leq 9, \forall n \in \mathbb{N}$

Resposta: **Opção C**

8.

8.1. Escrevendo z_1 na forma algébrica, e como $i^5 = i^{4+1} = i^4 \times i^1 = 1 \times i = i$ temos:

$$z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i} = \frac{2(i) + 4(1-i)}{(1-i) \times i} = \frac{2i + 4 - 4i}{i - i^2} = \frac{4-2i}{i-(-1)} = \frac{4-2i}{1+i} = \frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{4 - 4i - 2i + 2i^2}{1 - i + i - i^2} = \frac{4 - 6i + 2(-1)}{1-(-1)} = \frac{4 - 6i - 2}{1+1} = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i$$

Considerando $z_2 = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, o produto $z_1 \times z_2$, é dado por:

$$z_1 \times z_2 = (1-3i) \times (a+bi) = a + bi - 3ai - 3bi^2 = a - 3b(-1) - (b-3a)i = a + 3b + (b-3a)i$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais, vem que:

$$\operatorname{Re}(z_1 \times z_2) = \operatorname{Im}(z_1 \times z_2) \Leftrightarrow a + 3b = b - 3a \Leftrightarrow a + 3a = b - 3b \Leftrightarrow a + 3b = b - 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a = -2b \Leftrightarrow \frac{4}{-2}a = b \Leftrightarrow b = -2a$$

E assim, como $|z_2| = \sqrt{5}$, temos que:

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + (-2a)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + 4a^2 = 5 \Leftrightarrow 5a^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{5} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1}$$

E que:

$$b = -2(1) \vee b = -2(-1) \Leftrightarrow b = -2 \vee b = 2$$

Como o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas, vem que:

- $a + 3b > 0 \wedge b = -2a \Rightarrow a + 3(-2a) > 0 \Leftrightarrow a - 6a > 0 \Leftrightarrow -5a > 0 \Leftrightarrow a < 0$, ou seja, $a = -1$
- $a + 3b > 0 \wedge b = -2a \Leftrightarrow a + 3b > 0 \wedge \frac{b}{-2} = a \Rightarrow -\frac{b}{2} + 3b > 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2} + \frac{6b}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{5b}{2} > 0 \Leftrightarrow b > 0$, ou seja, $b = 2$

Desta forma temos que: $z_2 = a + bi = -1 + 2i$

8.2. Como $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$, então temos que:

$$(k+i)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki + i^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 + 2ki - 1 = 3 - 4i \Leftrightarrow k^2 - 1 + 2ki = 3 - 4i$$

Da igualdade de dois números complexos, resulta que:

$$k^2 - 1 = 3 \wedge 2ki = -4i \Leftrightarrow k^2 = 3 + 1 \wedge k = -\frac{4i}{2i} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{4} \wedge k = -2 \Leftrightarrow \left(k = 2 \vee k = 2\right) \wedge k = -2 \Leftrightarrow k = -2$$

Resposta: **Opção D**

9.

9.1. Como o raio da base da calote esférica é igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra, ou seja, $r = \frac{3R}{5}$, então a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite é:

$$50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{3R}{5}}{R}\right)^2}\right) = 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3R}{5R}\right)^2}\right) = 50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 10\%$$

Resposta: **Opção C**

9.2. Como se pretende que a altitude do satélite seja igual ao raio da base da respetiva calote esférica, temos que $r = h$

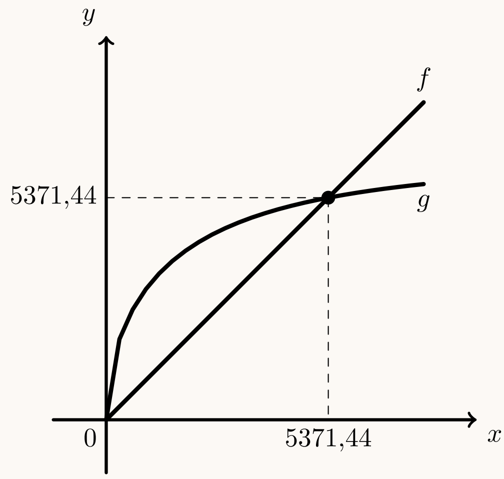
Por outro lado, sabemos que $r = \frac{R}{h+R}\sqrt{h^2+2hR}$, e que o raio da Terra é 6400 km, ou seja, $R = 6400$, pelo que: $r = \frac{6400}{h+6400}\sqrt{h^2+2h(6400)} = \frac{6400\sqrt{h^2+12800h}}{h+6400}$

Assim, o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite (ou a respetiva altura) é a solução da equação da equação:

$$h = \frac{6400\sqrt{h^2+12800h}}{h+6400}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{6400\sqrt{x^2+12800h}}{x+6400}$, para $0 < x < 6400$, reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite e a respetiva altura, quando estas são iguais:

$$(5371{,}44\,;\,5371{,}44)$$



Assim, temos que $R = 6400$ e $r \approx 5371{,}44$, pelo que a percentagem, arredondada às unidades, da área da superfície terrestre coberta pelo satélite, naquela posição, é:

$$50\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{5371{,}44}{6400}\right)^2}\right) \approx 23\%$$

10.

10.1. Temos que: $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\cos(x)\big) = \big(\cos(x)\big)^2 = \cos^2 x$

Como o declive da reta tangente num ponto é dado pelo valor da função derivada nesse ponto, determinamos a derivada da função $f\circ g$:

$$(f\circ g)'(x) = (\cos^2 x)' = \big((\cos x)(\cos x)\big)' = (\cos x)'(\cos x) + (\cos x)(\cos x)' = 2(\cos x)'(\cos x) =$$

$$= 2(-\operatorname{sen} x)(\cos x) = -2\operatorname{sen} x\cos x$$

E assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ é:

$$(f\circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\times\frac{2}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Resposta: **Opção B**

10.2. Como $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ e as funções f e g são ambas contínuas em $\mathbb{R}$, então a função $f - g$ também é contínua em $\mathbb{R}$, e em particular é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Como $-1 < 0 < 0{,}6$, ou seja, $f(0) - g(0) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, ou seja, que a equação $f(x) - g(x) = 0$ e também a equação $f(x) = g(x)$ têm, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

C.A.

$f(0) - g(0) = 0^2 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{3} \approx 0{,}6$

11.

11.1. Para averiguar se a função h é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $h(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$

- $h(1) = 1 + 1 \times e^{1-1} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(1 + xe^{x-1}\right) = 1 + 1 \times e^{1-1} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \frac{\sqrt{1} - 1}{\operatorname{sen}(1-1)} = \frac{1-1}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x - 1$, temos $x = y + 1$ e se $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$)

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{y+1} - 1}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{y+1}-1}{y}}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{(\sqrt{y+1}-1)(\sqrt{y+1}+1)}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{(\sqrt{y+1})^2 - 1^2)}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y+1-1}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{y+1}+1}}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}}{1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$, a função h não é contínua em $x = 1$

11.2. Como o domínio da função é $]-\infty,4]$, a assíntota horizontal do gráfico de h é determinada quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + xe^{x-1}\right) = 1 - \infty \times e^{-\infty-1} = 1 - \infty \times 0 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + (-y)e^{-y-1}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - ye^{-(y+1)}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{y}{e^{y+1}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{y}{e^y \times e}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{y}{e^y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} 1 - \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e} \times \frac{\lim\limits_{y\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} 1 - \frac{1}{e} \times 0 = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$, a reta de equação $y = 1$ também é assíntota horizontal do gráfico de h

12.

12.1. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{2 + \ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2 + \ln x)(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\left((2)' + \frac{(x)'}{x}\right) \times x - (2 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{\left(0 + \frac{1}{x}\right) \times x - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$-1 - \ln x$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
f''	n.d.	$+$	0	$-$
f	n.d.	$\cup$	Pt. I.	$\cap$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{e}\right]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa é $x = \frac{1}{e}$

12.2. Como $1^2 - x^2 = (1-x)(1+x)$, temos que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{1^2-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{-(1+x)} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x\to 1} \frac{1}{-(1+x)} =$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{-(1+1)} = -\frac{f'(1)}{2} = -\frac{\frac{2+\ln 1}{1}}{2} = -\frac{2-0}{2} = -1$$

Resposta: **Opção B**