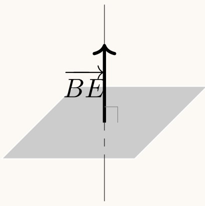
Exame final nacional de Matemática A **(2021, Época especial)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como o plano α é perpendicular à reta BE, o vetor $\overrightarrow{BE} = (-1,6,2)$ é um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano é da forma:

$$-x + 6y + 2z + d = 0$$



E como o ponto de coordenadas $(1,0,1)$ pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-1+6(0)+2(1)+d = 0+d = 0 \Leftrightarrow -1+0+2+d = 0 \Leftrightarrow 1+d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

E assim, uma equação do plano α, é:

$$-x + 6y + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 6y - 2z + 1 = 0$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como a base da pirâmide está contida no plano xOz e o vértice que não pertence à base, o vértice E, tem coordenadas $(-2,6,2)$, então a altura da pirâmide é a distância do ponto E ao plano xOz, ou seja 6.

Como o volume da pirâmide é 20, podemos calcular a área da base:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times 6 \Leftrightarrow 20 = \frac{6 \times A_{[ABCD]}}{3} \Leftrightarrow 20 = 2 \times A_{[ABCD]} \Leftrightarrow \frac{20}{2} = A_{[ABCD]} \Leftrightarrow 10 = A_{[ABCD]}$$

E assim, com $[ABCD]$ é um quadradado, podemo determinar a medida do lado $[AB]$, ou seja a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{10}$$

Como o $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1,6,2)$ podemos determinar as coordenadas do ponto B a partir das coordenadas do ponto E:

$$B + \overrightarrow{BE} = E \Leftrightarrow B = E - \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow B = (-2,6,2) - (-1,6,2) = (-2-(-1),6-6,2-2) = (-1,0,0)$$

Como o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz, tem abcissa e ordenada nulas, ou seja, as suas coordenadas são da forma $(0,0,z)$; $z \in \mathbb{R}^+$, pelo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são da forma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,0) - (0,0,z) = (-1,0,-z);\ z \in \mathbb{R}^+$$

Desta forma determinamos o valor de z, recorrendo ao valor da norma:

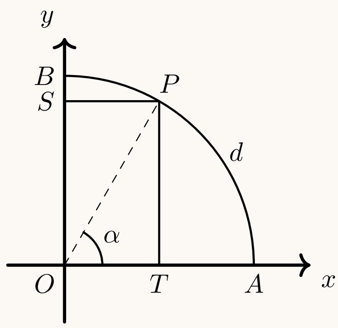
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + z^2} = \sqrt{10} \Rightarrow (-1)^2+0^2+z^2 = 10 \Leftrightarrow z^2 = 10-1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z = \pm 3$$

Como $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-z)$; $z \in \mathbb{R}^+$, temos que $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-3)$

2. Considerando α como a amplitude do ângulo AOP, temos que as coordenadas do ponto P são:

$$P(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$$

E assim, como $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, $\overline{OT} = x_P = r\cos\alpha$ e $\overline{OS} = y_P = r\operatorname{sen}\alpha$, vem que:



$$\overline{BS} + \overline{TA} = \overline{OB} - \overline{OS} + \overline{OA} - \overline{OT} = r - r\cos\alpha + r - r\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= r(1 - \cos\alpha + 1 - \operatorname{sen}\alpha) = r(2 - \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$$

Como d o comprimento do arco AP, definido pelo ângulo α, e o perímetro da circunferência é $2\pi r$, correspondente a um ângulo de amplitude 2π radianos, então podemos identificar uma relação entre α, r e d:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{d}{2\pi r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi \times d}{2\pi \times r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{d}{r}$$

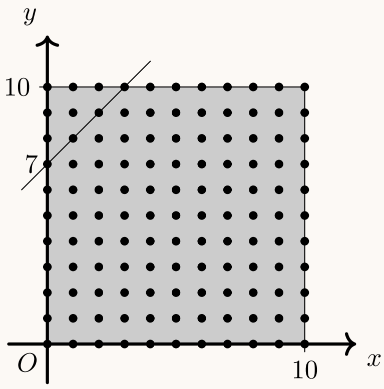
E assim, temos que:

$$\overline{BS} + \overline{TA} = r\left(2 - \operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

3. Observando que entre 0 e 10 existem 11 valores números inteiros (incluindo estes limites), então o número de pontos cujas coordenadas são números inteiros, na região indicada, ou seja, o número de casos possíveis, é:

$$11 \times 11 = 121$$

A reta de equação $y = x + 7$ contém 4 dos pontos com coordenadas inteiras que pertencem a esta região $\big((0,7);(1,8);(2,9)$ e $(3,10)\big)$, o seja, o número de casos favoráveis é 4.



Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que o valor, arredondado às milésimas, da probabilidade de selecionar ao acaso um dos pontos identificados e ele pertencer à reta dada, é:

$$\frac{4}{121} \approx 0{,}033$$

Resposta: **Opção B**

4. Se a Fernanda oferecer 3 dos 5 livros e 3 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção não é relevante e o beneficiário deste conjunto pode ser qualquer um dos dois netos o número de formas diferentes de fazer a repartição é:

$$2 \times {}^5C_3 \times {}^7C_3$$

Se a alternativa for oferecer 4 dos 5 livros e 2 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção continua a não ser relevante e o beneficiário deste conjunto também pode ser qualquer um dos dois netos o número de formas diferentes de fazer a repartição é:

$$2 \times {}^5C_4 \times {}^7C_2$$

Como as qualquer uma destas alternativas pode acontecer em alternativa, temos que o número de modos diferentes pode a Fernanda repartir os doze objetos pelos seus dois netos é:

$$2 \times {}^5C_3 \times {}^7C_3 + 2 \times {}^5C_4 \times {}^7C_2 = 910$$

5. Temos que:

- $P(B|A)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+\frac{3}{2}P(A)-\frac{1}{2}P(A)=P(A)+\frac{2}{2}P(A)=2P(A)$
- $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-2P(A)$

E assim, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)+2P(A)=1-2P(A)+2P(A)=1$$

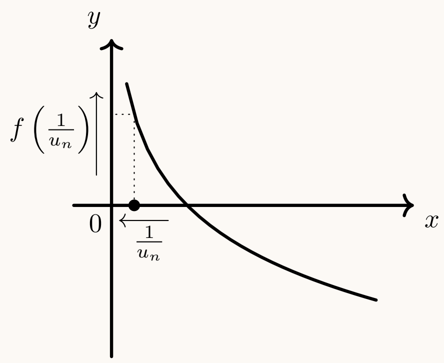
6. Temos que:

$$\lim u_n=\lim(2n^2-n)=\lim\big(n(2n-1)\big)=+\infty\times\infty=+\infty$$

Logo: $\lim\frac{1}{u_n}=\frac{1}{+\infty}=0^+$

E assim, vem que:

$$\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$



Desta forma, dos gráficos apresentados, o único que representa uma função que pode verificar esta condição é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Os termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) são aqueles cuja ordem é da forma $2k-1$ $(k\in\mathbb{N})$, ou seja a sucessão dos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) é:

$$v_k=2(2k-1)+1=4k-2+1=4k-1$$

Ou seja, é uma progressão aritmética de razão 4, pelo que a soma dos 200 primeiros termos é:

$$S_{200}=\frac{v_1+v_{200}}{2}\times 200=\frac{4(1)-1+4(200)-1}{2}\times 200=\frac{4-2+800}{2}\times 200=\frac{802}{2}\times 200=401\times 200=80200$$

8. Escrevendo z_1 e z_2 na forma algébrica, com o objetivo de fazer a adição, temos:

- $z_1=e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$
- $z_2=2e^{i(\theta+\pi)}=2\big(\cos(\theta+\pi)+i\operatorname{sen}(\theta+\pi)\big)=2\big(-\cos\theta+i(-\operatorname{sen}\theta)\big)=-2\cos\theta-2i\operatorname{sen}\theta$

E assim, vem que:

$$z_1+z_2=e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta+\big(-2\cos\theta-2i\operatorname{sen}\theta\big)=\cos\theta-2\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta-2i\operatorname{sen}\theta=$$

$$=-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta=-\big(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\big)=-z_1$$

Assim, temos que:

$$\arg(z_1+z_2)=\arg(-z_1)=\pi+\theta$$

E como $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, o afixo do número complexo z_1+z_2 pertence ao 3.º quadrante.

Resposta: **Opção C**

9. Temos que:

- $z_1{}^2 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times e^{2\times i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}i$
- $\left(\overline{z_2}\right)^3 = \left(\overline{2i}\right)^3 = (-2i)^3 = (-2)^3 i^3 = -8\times(-i) = 8i$
- $z_1{}^2 \times \left(\overline{z_2}\right)^3 = \frac{1}{4}i \times 8i = \frac{8}{4}i^2 = 2\times(-1) = -2$

Assim, temos que:

$$iz^2 + z_1{}^2 \times \left(\overline{z_2}\right)^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + (-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow iz^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \Leftrightarrow z^2 = \frac{4\times i}{i\times i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{4i}{-1} \Leftrightarrow z^2 = -4i \Leftrightarrow z^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4e^{i\frac{3\pi}{2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1\}$$

Assim, os dois números complexos que são solução da equação, escritos na forma trigonométrica, são:

- $(k=0) \rightarrow \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(0)\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $(k=1) \rightarrow \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(1)\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

10.

10.1. Como a função f é contínua em $x=1$, temos que:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(1) = 1 - 2 + \ln(3-2(1)) = 1 - 2 + \ln(1) = -1 + 0 = -1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{1-x^2} + k\right) = \frac{\text{sen}\,(1-1)}{1-1^2} + k = \frac{0}{0} + k$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x-1$, se $x\to 1$, então $y\to 0$, e observando que $1-x^2 = 1^2 - x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(x+1)$)

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{1-x^2} + k\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{-(x-1)(x+1)} + k\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{-(x+1)} + k\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\text{sen}\,(x-1)}{x-1} \times \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{-(x+1)} + \lim_{x\to 1^+} k = \underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \frac{1}{-(1+1)} + k = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{2} + k$$

Como a função é contínua em $x=1$, podemos determinar o valor de k:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + k = -1 \Leftrightarrow k = -1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

10.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]-\infty,1[$:

$$f'(x) = \left(x-2+\ln(3-2x)\right)' = (x)'-(2)'+(\ln(3-2x))' = 1-0+\frac{(3-2x)'}{(3-2x)} = 1+\frac{0-2}{3-2x} = 1-\frac{2}{3-2x}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]-\infty,1[$, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\frac{2}{3-2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3-2x} \underset{x\neq\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} 3-2x = 2 \Leftrightarrow 3-2 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
f'	+	0	−	n.d.
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}-2+\ln\left(3-2\times\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}+\ln(3-1) = -\frac{3}{2}+\ln(2) = \ln 2-\frac{3}{2}$$

11. Recorrendo às regras operatórias de logaritmos, e observando que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x.\cos x$, temos:

$$g(x) = \log_2(1-\cos x)+\log_2(1+\cos x)+2\log_2(2\cos x) = \log_2\left((1-\cos x)(1+\cos x)\right)+\log_2(2\cos x)^2 =$$

$$= \log_2(1+\cos x-\cos x-\cos^2 x)+\log_2(4\cos^2 x) = \log_2(1-\cos^2 x)+\log_2(4\cos^2 x) =$$

$$= \log_2(\operatorname{sen}^2 x)+\log_2(4\cos^2 x) = \log_2(2^2\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x) = \log_2(2\operatorname{sen} x.\cos x)^2 =$$

$$= \log_2\left(\operatorname{sen}(2x)\right)^2 = 2\log_2\left(\operatorname{sen}(2x)\right)$$

12.

12.1. Com o decorrer do tempo, ou seja, quando $t\to+\infty$, o número de bactérias vivas existentes no tubo é dado por:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(N_0 e^{1,08t-0,3t^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} N_0 \times \lim_{t\to+\infty} e^{1,08t-0,3t^2} = N_0\times e^{-\infty} = N_0\times 0 = 0$$

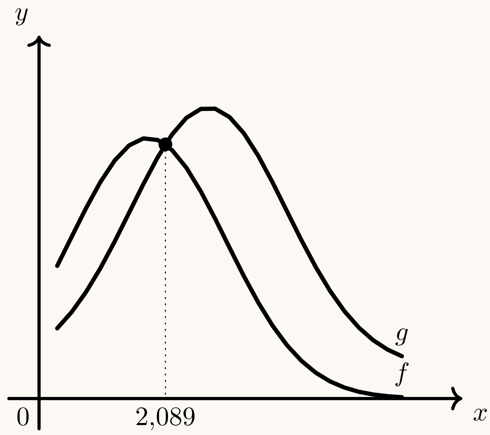
Resposta: **Opção D**

12.2. Como no instante, t_1 , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante, temos que:

$$N(t_1) = N(t_1 - 1) + \frac{1}{2}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = 1{,}63e^{1{,}08x-0{,}3x^2}$ e $g(x) = -1{,}63e^{1{,}08(x-1)-0{,}3(x-1)^2} + \frac{1}{2}$, numa janela compatível com o contexto descrito ($0 < x < 6$), correspondente a 12 horas), reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) das coordenadas do ponto de interseção, cuja abcissa é o valor de t_1:

$$(2{,}089,\ 4{,}202)$$



Assim temos que o instante $t_1 \approx 2{,}089$, e como 0,089 horas corresponde a $0{,}089 \times 60 \approx 5$ temos que o instante t_1 ocorreu 2 horas e 5 minutos após a colocação das bactérias no tubo de ensaio.

13. Como o domínio da função é $\mathbb{R}$, podem existir assíntotas horizontais do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$:

- $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$
- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^{x-2}} = \frac{+\infty-1}{e^{+\infty-2}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x-2$, temos $x = y+2$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y+2-1}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y+1}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{e^y} + \frac{1}{e^y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} + \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} + \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{\lim_{y\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} + \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

Desta forma temos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, pelo que as retas de equações $y = 1$ e $y = 0$ são assíntotas horizontais do gráfico de f, para $x \to -\infty$ e para $x \to +\infty$, respetivamente.

14. Resolvendo a inequação, temos:

$$e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \times (4+e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq \frac{5e^x}{e^x} \underset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 4+e^{2x} \geq 5e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0$$

Considerando $y = e^x$, temos que: $y^2 - 5y + 4 \geq 0$

Como $y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$, e o coeficiente de y^2 é positivo, então: $y^2 - 5y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 4$

Assim, como $y = e^x$, temos que:

$$e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \vee e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq \ln 1 \vee x \geq \ln 4 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \ln 4$$

E como $-2 \leq x \leq 2$, temos que o conjunto dos números reais que verificam a condição dada é:

$$\left(]-\infty,0] \cup [\ln 4,+\infty[\right) \cap [-2,2] = [-2,0] \cup [\ln 4,2]$$

15. Como a reta é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g, o seu declive corresponde ao valor das derivadas nos respetivos pontos de tangência.

Designado por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B, como as ordenadas dos pontos A e B, são, respetivamente $f(a) = 2a^2$ e $g(b) = -(b-1)^2$, então o declive da reta é:

$$m_{AB} = \frac{f(a) - f(b)}{a-b} = \frac{2a^2 - (-(b-1)^2)}{a-b} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a-b}$$

Por outro lado, temos que:

- $f'(x) = (2x^2)' = 2 \times 2x = 4x$, pelo que $m_{AB} = f'(a) = 4a$
- $g'(x) = \left(-x-1)^2\right)' = -2(x-1) = -2x+2$, pelo que $m_{AB} = g'(b) = -2b+2$
- $f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow 4a = -2b+2 \Leftrightarrow 2a = -b+1 \Leftrightarrow b = -2a+1$

E assim, substituindo na expressão anterior, temos que:

$$m_{AB} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a-b} = \frac{2a^2 + (-2a+1-1)^2}{a-(-2a+1)} = \frac{2a^2 + (-2a)^2}{a+2a-1)} = \frac{2a^2+4a^2}{3a-1} = \frac{6a^2}{3a-1}$$

Temos ainda que:

$$m_{AB} = f'(a) \Leftrightarrow \frac{6a^2}{3a-1} = 4a \underset{a \neq \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 6a^2 = 4a(3a-1) \Leftrightarrow 6a^2 = 12a^2 - 4a \Leftrightarrow 6a^2 - 12a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a(-3a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee -3a+2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2 = 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee \frac{2}{3} = a \wedge a \neq \frac{1}{3}$$

Como a reta não é horizontal o declive não pode ser zero, pelo que a abcissa do ponto A é $a = \frac{2}{3}$ e a abcissa do ponto B é $b = -2a+1 = -2\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$