Exame final nacional de Matemática A **(2021, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como se pretende identificar uma reta perpendicular à reta EF, e os respetivos vetores diretores são perpendiculares, calculamos os produtos escalares entre os vetores diretores das retas de cada uma das hipóteses o vetor diretor da reta EF para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar direções perpendiculares à reta EF:

- $(-3,-2,2).(2,-3,0) = -3\times 2 + (-2)\times(-3) + 2\times 0 = -6+6+0 = 0$
- $(-3,-2,2).(0,3,-3) = -3\times 0 + (-2)\times 3 + 2\times(-3) = 0-6-6 = -12$
- $(-3,-2,2).(0,3,3) = -3\times 0 + (-2)\times 3 + 2\times 3 = 0-6+6 = 0$
- $(-3,-2,2).(2,0,-3) = -3\times 2 + (-2)\times 0 + 2\times(-3) = -6+0-6 = -12$

Assim, temos que apenas as retas cujas equações são apresentadas nas opções (A) e (C) são perpendiculares à reta EF, pelo que resta verificar a qual das duas retas pertence o ponto E, substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

- $(7,2,15) = (7,-3,3) + k(2,-3,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7+2k \\ 2 = -3-3k \\ 15 = 3+0 \end{cases}$ (condição impossível)

- $(7,2,15) = (7,-10,3) + k(0,3,3) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7+0 \\ 2 = -10+3k \\ 15 = 3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 12 = 3k \\ 12 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 4 = k \\ 4 = k \end{cases}$

Ou seja, $(7,2,15) = (7,-10,3) + 4(0,3,3)$, pelo que o ponto E pertence à reta definida pela equação $(x,y,z) = (7,-10,3) + k(0,3,3), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como as diagonais de faces opostas de começamos por determinar a equação do plano ABG, para determinar a ordenada do ponto B:

Como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo retângulo e a reta EF é perpendicular ao plano ABG, então o vetor diretor da reta ($\vec{u} = (-3, -2, 2)$), é também um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano ABG é da forma:

$$-3x - 2y + 2z + d = 0$$

Como são conhecidas as coordenadas do ponto G ((6,10,13), podemos determinar o valor de d, substituindo as coordenadas na equação anterior:

$$-3(6) - 2(10) + 2(13) + d = 0 \Leftrightarrow -18 - 20 + 26 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

Assim temos que a equação do plano ABG é $-3x - 2y + 2z + 12 = 0$ e como o ponto B pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas, pelo que a sua ordenada pode ser obtida a partir da equação do plano ABG:

$$-3(0) - 2y + 2(0) + 12 = 0 \Leftrightarrow -2y + 12 = 0 \Leftrightarrow 12 = 2y \Leftrightarrow \frac{12}{2} = y \Leftrightarrow 6 = y$$

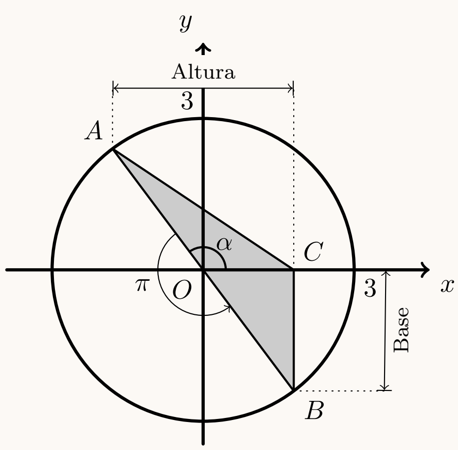
Como as arestas paralelas de faces opostas de um paralelepípedo retângulo são congruentes, podemos calcular a medida do raio da superfície esférica:

$$r = \overline{BD} = \overline{GE} = \sqrt{(7-6)^2 + (2-10)^2 + (15-13)^2} = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 64 + 4} = \sqrt{69}$$

Assim, temos que a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto $B(0,6,0)$ e que passa no ponto D, é:

$$(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = \left(\sqrt{69}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69$$

2. Como a circunferência tem raio 3 e está centrada na origem, as coordenadas do ponto A são da forma $(3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha)$ e como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência as coordenadas do ponto B são da forma $(3\cos(\alpha+\pi), 3\,\text{sen}\,(\alpha+\pi))$.



Assim, considerando o lado $[BC]$ como a base do triângulo, temos que a altura é $2 \times \overline{OC}$, porque a abcissa do ponto A é simétrica da abcissa dos pontos B e C

Como α é um ângulo do segundo quadrante, então:

- $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\text{sen}\,(\alpha+\pi) < 0$, pelo que:

$$\overline{BC} = |3\,\text{sen}\,(\alpha+\pi)| = |-3\,\text{sen}\,\alpha| = 3\,\text{sen}\,\alpha$$

- $\cos\alpha < 0$ e $\cos(\alpha+\pi) > 0$, pelo que:

$$\overline{OC} = |3\,\cos(\alpha+\pi)| = -|3\cos\alpha| = -3\cos\alpha$$

Assim, temos que a área do triângulo é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times 2 \times \overline{OC}}{2} = 3\,\text{sen}\,\alpha \times (-3\cos\alpha) = -9\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

3. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
Pt:≪O estudante ser português≫
R:≪O estudante ser um rapaz≫

Temos que $P\left(\overline{R}\right) = 60\%$ e $P\left(R \cap \overline{Pt}\right) = 15\%$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

	Pt	$\overline{Pt}$	
R	25%	15%	40%
$\overline{R}$			60%
			100%

- $P(R) = 100 - P\left(\overline{R}\right) = 100\% - 60\% = 40\%$
- $P\left(Pt \cap R\right) = 40\% - 15\% = 25\%$

Assim, a probabilidade de um aluno da escola escolhido, ao acaso, ser português sabendo que era um rapaz, na forma de percentagem, é 62,5%, porque:

$$P(Pt|R) = \frac{P(Pt \cap R)}{P(R)} = \frac{25}{40} = 0{,}625$$

Resposta: **Opção D**

4. Como os dois condutores são dois dos três dirigentes,existem ${}^3A_2$ formas diferentes de selecionar os condutores (a ordem é relevante, porque as viaturas são diferentes).

Como no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo, não existe qualquer lugar disponível para o treinador ou para o dirigente que não vai conduzir, pelo que o número de formas diferentes de selecionar os restantes ocupantes do automóvel consiste em contar o número de formas de selecionar 2 dos 5 jogadores do sexo masculino e 2 das 5 jogadoras do sexo feminino, ou seja, ${}^5C_2 \times {}^5C_2$

Assim, temos a contagem do número de condutores e grupos de ocupantes de cada uma das viaturas, pelo que resta ainda ordenar os 4 ocupantes do automóvel e 8 ocupantes da carrinha (à exceção dos condutores) pelos lugares disponíveis em cada viatura, ou seja $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ para os lugares do automóvel e $P_8 = {}^8A_8 = 8!$ para os lugares da viatura.

Assim, a uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, é:

$${}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8!$$

5. Como existem 30 alunos na turma e se pretende escolher ao acaso, 5 alunos da turma,o número de grupos diferentes que é possível escolher (sem considerar a ordem relevante), é ${}^{30}C_5$

   Temos ainda que:

   - O grupo deve integrar o André e a Beatriz que têm ambos 16 anos.
   - 60% dos alunos são raparigas, ou seja, $30 \times 0{,}6 = 18$ raparigas, e $30 - 18 = 12$ rapazes.
   - Um terço dos rapazes tem 17 anos a que corresponde $\frac{12}{3} = 4$ rapazes, e existem $12 - 4 = 8$ rapazes com 15 ou 16 anos.
   - Um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos a que corresponde $\frac{18}{3} = 6$ raparigas, e existem $18 - 6 = 12$ raparigas com 17 anos.

   Assim, como o grupo deve ser constituído por dois jovens com 17 anos, e existem 4 rapazes e 12 raparigas, ou seja, $12 - 4 = 16$ no total, existem ${}^{16}C_2$ grupos distintos de 2 alunos com 17 anos.

   Relativamente ao aluno de 15 ou 16 que deve integrar o grupo, podemos verificar que existem 8 rapazes e 6 raparigas, ou seja, 14 alunos no total nesta faixa etária, mas como o André e a Beatriz devem integrar o grupo, restam $14 - 2 = 12$ alunos que respeitam esta restrição.

   Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar ao caso cinco alunos da turma, o grupo ser ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos, na forma de dízima, arredondado às centésimas, temos:

$$p = \frac{1 \times 1 \times {}^{16}C_2 \times 12}{{}^{30}C_5} \approx 0{,}01$$

6. Como a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica, temos que:

$$v_8 = v_5 \times r \times r \times r \Leftrightarrow 108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow \frac{108}{4} = r^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = r \Leftrightarrow 3 = r$$

   E assim, vem que:

$$v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$$

   Resposta: **Opção A**

7. Observando que para as ordens ímpares, temos que $n + 1$ é par, e que por isso, $(-1)^{n+1} = 1$, então os termos de ordem ímpar da sucessão são da forma $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

   Assim, para que os termos pertençam ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$, temos que:

$$2 + \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} \wedge 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{43} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} - 2 \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} - \frac{82}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{67}{43} - \frac{66}{33} \Leftrightarrow$$

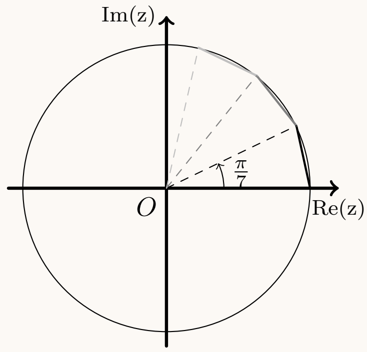
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \underset{n \neq 0}{\Leftrightarrow} n \leq 41 \wedge n \geq 33$$

   Como se pretende identificar apenas os termos de ordem ímpar, temos os termos u_{33}; u_{35}; u_{37}; u_{39} e u_{41}, ou seja, o número de termos de ordem ímpar que pertence ao intervalo dado é 5.

8. Calculando o valor de w, temos:

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{3\pi}{28}}} = \frac{2}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{28}-\frac{3\pi}{28}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{28}} = e^{i\frac{\pi}{7}}$$

Assim, como o afixo de w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo, temos que o polígono regular pode ser decomposto em triângulos isósceles cuja amplitude dos ângulos de vértice no centro é $\frac{\pi}{7}$



Assim, o número mínimo de vértices do polígono, que corresponde ao número de lados, que corresponde ao número de triângulos, é:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{7}} = \frac{14\pi}{\pi} = 14$$

Resposta: **Opção B**

9. Calculando o produto $z1 \times z_2$, vem:

$$z_1 \times z_2 = (-3+2i) \times (1+2i) = -3 - 6i + 2i + 4i^2 = -3 - 4i + 4(-1) = -3 - 4 - 4i = -7 - 4i$$

Simplificando a expressão de w, temos:

$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{-7-4i}{2-i} = \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-14-7i-8i-4i^2}{2^2-i^2} = \frac{-14+4-15i}{4+1} = \frac{-10-15i}{5} = -2-3i$$

Desta forma, considerando $\theta = \operatorname{Arg}(w)$ temos que:

- $|w| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante.
- Como $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$, a função tangente é crescente e contínua no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$ e $\frac{3}{2} > 1$ então $\theta > -\frac{3\pi}{4}$
- Como θ é um ângulo do 3º quadrante e $\theta > -\frac{3\pi}{4}$, então $\operatorname{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$

10.

10.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x=1$, temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = -1^2(1+2\ln 1) = -(1+2\times 0) = -1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2(1+2\ln x)\right) = -(1^-)^2(1+2\ln 1^-) = -1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = \frac{5-5e^{1^+-1}}{(1^+)^2+3(1^+)-4} = \frac{5-5\times 1}{1+3-4} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(como $x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-4$ então $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5(1-e^{x-1})}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-5(e^{x-1}-1)}{(x-1)(x+4)} =$$

(fazendo $y = x-1$, temos $x = y+1$ e se $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$)

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{-5(e^y-1)}{y(y+1+4)} = \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{(e^y-1)}{y} \times \frac{-5}{y+5}\right) = \underbrace{\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{-5}{y+5} = 1 \times \frac{-5}{5} = -1$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, então a função f é contínua em $x=1$

10.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]0,1[$:

$$f'(x) = \left(-x^2(1+2\ln x)\right)' = (-x^2)'\times(1+2\ln x)+(-x^2)(1+2\ln x)' = -2x(1+2\ln x)-x^2\times((1)'+2(\ln x)') =$$

$$= -2x-4x\ln x - x^2\left(0+2\times\frac{1}{x}\right) = -2x-4x\ln x-\frac{2x^2}{x} \underset{x\neq 0}{=} -2x-4x\ln x-2x = -4x-4x\ln x$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]0,1[$, temos:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x-4x\ln x = 0 \Leftrightarrow -4x(1+\ln x)=0 \Leftrightarrow -4x=0 \vee 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee \ln x = -1 \Leftrightarrow x=0 \vee x=e^{-1}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		e^{-1}		1
$-4x$	n.d.	$-$	$-$	$-$	n.d.
$1+\ln x$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left]0,e^{-1}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[e^{-1},1\right[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f\left(e^{-1}\right) = -\left(e^{-1}\right)^2\left(1+2\ln\left(e^{-1}\right)\right) = -e^{-2}\times(1+2\times(-1)) = -e^{-2}\times(-1) = e^{-2}$$

11. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x) = \left(x\cos x + \operatorname{sen} x\right)' = \left(x\cos x\right)' + \left(\operatorname{sen} x\right)' = (x)'\cos x + x(\cos x)' + \cos x =$$

$$= \cos x + x(-\operatorname{sen} x) + \cos x = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico num ponto corresponde ao valor da função derivada nesse ponto, mostrar, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$ é equivalente a mostrar que a equação $g'(x) = -\frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução.

Como $g'(x)$ resulta da soma e de produtos de funções contínuas, então é contínua no domínio, ou seja, é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

Como $-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{3\pi}{2}$, ou seja, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $g'(c) = -\frac{1}{2}$, ou seja, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$

C.A.

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\times\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} =$
$= 2\times 0 - \frac{\pi}{2}\times 1 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2cos\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\times\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} =$
$= 2\times 0 - \frac{3\pi}{2}\times(-1) = 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

12. Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$, começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de h, quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2 - \ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2)}{x(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2 - \ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2x^2 - \ln x}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(h(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(h(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(h(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2 - \ln x)}{2(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + x\ln x}{4x^2 - 2\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \ln x}{4x^2 - 2\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4x^2 - 2\ln x}{x \ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4x^2}{x\ln x} - \frac{2\ln x}{x \ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4x}{\ln x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\frac{\ln x}{4x}} - \frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{\ln x}{x}} - \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times 0} - \frac{2}{+\infty}} = \frac{1}{\frac{1}{0} - 0} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h, quando $x \to +\infty$, é:

$$y = \frac{1}{2}x + 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$

13.

13.1. No início do vazamento, ou seja, zero minutos após o inicio do vazamento ($t = 0$) a altura é do combustível é:

$$a(0) = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \times 0)^{\frac{2}{3}} = 1{,}8 - (0{,}216)^{\frac{2}{3}} = 1{,}44$$

Como o depósito tem 1,8 metros de altura (que corresponde ao diâmetro das bases do cilindro), a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito é $\frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$

Assim a diferença entre estas alturas, em metros, é $1{,}44 - 0{,}9 = 0{,}54$

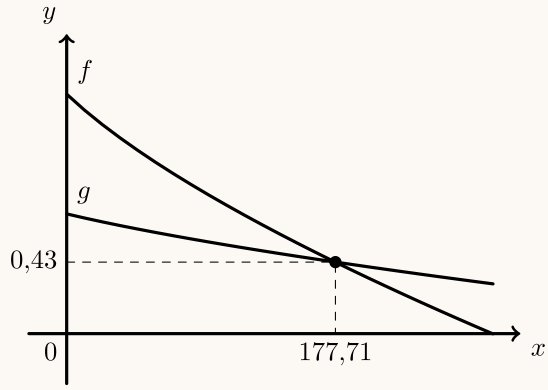
Resposta: **Opção B**

13.2. Como após t_1 minutos a altura é $a(t_1)$, quanto tiver passado um período de tempo igual, terão passado $2t_1$ minutos, e pretende-se que, nesse instante, a altura do combustível no depósito seja igual a metade do valor anterior, ou seja, $a(2t_1) = \frac{a(t_1)}{2}$

Assim, o valor de t_1 é a abcissa do ponto de interseção das funções:

- $f(x) = a(2x) = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \times 2x)^{\frac{2}{3}}$
- $g(x) = \frac{a(x)}{2} = \frac{1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \times x)^{\frac{2}{3}}}{2}$

Representando na calculadora as funções f e $g(x)$, numa janela compatível com os domínios, obtemos o gráfico representado na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às centésimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos: 177,71

Convertendo 2 horas correspondem a $2 \times 60 = 120$ minutos, restam ainda $177{,}71 - 120 = 57{,}71$ minutos para além das 2 horas, ou seja, aproximadamente 58 minutos, pelo que o valor de t_1, em horas e minutos é de:

2 horas e 58 minutos

14. Resolvendo a equação, temos:

$$\ln\left((1-x)e^{x-1}\right) = x \Leftrightarrow e^x = (1-x)e^{x-1} \Leftrightarrow e^x = (1-x) \times \frac{e^x}{e} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x} = \frac{1-x}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1-x}{e} \Leftrightarrow e = 1-x \Leftrightarrow x = 1-e$$

Determinando o domínio da condição, temos:

$$(1-x)e^{x-1} > 0 \underset{e^{x-1}>0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$$

Como $1 - e < 1$, temos que $1 - e$ é solução da equação.

C.S.$= \{1 - e\}$

15. Determinando as abcissas dos pontos de interseção temos:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow k\,\text{sen}\,(2x)=k\cos x \Leftrightarrow k\,\text{sen}\,(2x)=k\cos x \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x=\frac{k\cos x}{k} \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x=\cos x \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x-\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(2\,\text{sen}\,x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee 2\,\text{sen}\,x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \vee \text{sen}\,x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Atribuindo os valores -1 e 0 obtemos as três soluções da equação que pertencem ao domínio das funções $\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$:

$$x=-\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{\pi}{2}$$

Assim, podemos determinar as ordenadas dos pontos de interseção:

- $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=k\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=k\times 0=0 \quad \left(A\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right)$
- $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=k\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=ktimes\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{k\sqrt{3}}{2} \quad \left(B\left(\frac{\pi}{6},\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=k\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=k\times 0=0 \quad \left(C\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)$

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, temos que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$

Calculando as coordenadas dos vetores indicados, temos:

- $\overrightarrow{BA}=A-B=\left(-\frac{\pi}{2},0\right)-\left(\frac{\pi}{6},\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{6},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{4\pi}{6},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\overrightarrow{BC}=C-B=\left(\frac{\pi}{2},0\right)-\left(\frac{\pi}{6},\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{6},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{2\pi}{6},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{3},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$

E assim, calculamos o valor de k:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{\pi}{3},-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3}\times\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9}+\left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9}+\frac{k^2\times 3}{4}=0 \Leftrightarrow \frac{3k^2}{4}=\frac{2\pi^2}{9} \Leftrightarrow k^2=\frac{2\pi^2\times 4}{9\times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2=\frac{8\pi^2}{27} \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k=\sqrt{\frac{8\pi^2}{27}} \Leftrightarrow k=\sqrt{\frac{8}{27}}\pi$$