

Exame final nacional de Matemática A (2021, 2.ª fase)

Proposta de resolução



1.

1.1. Como a superfície esférica tem centro no ponto R e contém o ponto Q , o comprimento do raio é:

$$\begin{aligned} r = \overline{RQ} &= \sqrt{(-5 - (-2))^2 + (5 - 1)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{(-5 + 2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 16 + 16} = \sqrt{9 + 32} = \sqrt{41} \end{aligned}$$

Como as coordenadas do centro são $(-5, 5, -3)$, a equação da superfície esférica é:

$$(x - (-5))^2 + (y - 5)^2 + (z - (-3))^2 = (\sqrt{41})^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 41$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como $[PQRS]$ é um trapézio de bases $[PQ]$ e $[RS]$, as retas PQ e RS são paralelas. Assim, o plano perpendicular à reta RS também é perpendicular à reta PQ , pelo que o vetor \overrightarrow{PQ} é um vetor normal do plano pretendido.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 1, 1) - (1, -1, 2) = (-2 - 1, 1 - (-1), 1 - 2) = (-3, 2, -1)$$

Logo a equação do plano é da forma:

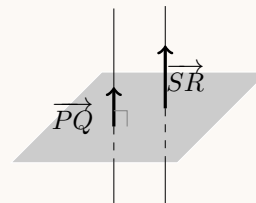
$$-3x + 2y - z + d = 0$$

E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-3(1) + 2(-1) - (2) + d = 0 \Leftrightarrow -3 - 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow -7 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$$

E assim, a equação do plano perpendicular à reta RS e que contém o ponto P , é:

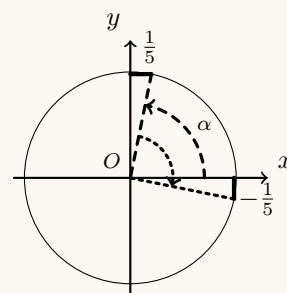
$$-3x + 2y - z + 7 = 0$$



2. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que, $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que $\operatorname{sen} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \alpha$, ou seja, $\cos \alpha = -\left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5}$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{5} \right)^2 &= 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \quad \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} \end{aligned}$$



Logo, podemos calcular o valor de $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{24}}{1} = \sqrt{24}$$

E, como $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\beta - \pi)$ e $\operatorname{tg} (-\beta) = -\operatorname{tg} \beta$, temos que:

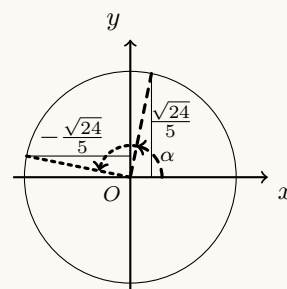
$$\operatorname{tg} (\pi - \alpha) = \operatorname{tg} (\pi - \alpha - \pi) = \operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{24}$$

Como $\cos \beta = \cos (\beta + 2\pi)$, logo $\cos \beta = \cos (\beta + 4\pi)$, e assim, temos que:

$$\begin{aligned} \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha \right) &= \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + 4\pi \right) = \\ &= \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + \frac{8\pi}{2} \right) = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que, $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que:

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$



E assim, temos que:

$$\operatorname{tg} (\pi - \alpha) + 2 \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha + 2 (-\operatorname{sen} \alpha) = -\sqrt{24} + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{24}}{5} \right) = -\frac{5\sqrt{24}}{5} - \frac{2\sqrt{24}}{5} = -\frac{7\sqrt{24}}{5}$$



3.

- 3.1. Como existem 12 raquetes distintas e se pretende escolher ao acaso, um conjunto de 6 (ficando as restantes 6 no segundo conjunto), o número de conjuntos diferentes que é possível escolher (sem considerar a ordem relevante), é ${}^{12}C_6$

Temos ainda que, como se pretende que este conjunto ficar com 3 raquetes de badminton (das 6 existentes) e 3 raquetes de ténis (das 6 existentes), ficando o restante conjunto com a mesma composição, o número de casos favoráveis é ${}^6C_3 \times {}^6C_3$

Assim, a probabilidade dos dois conjuntos ficar com três raquetes de badminton e três raquetes de ténis, é:

$$\frac{{}^6C_3 \times {}^6C_3}{{}^{12}C_6} \approx 0,43$$

Resposta: **Opção B**

- 3.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um sócio do clube, e os acontecimentos:

M : «O sócio é uma Mulher»

B : «O sócio pratica badminton»

Temos que $P(M) = 0,65$; $P(B|\overline{M}) = \frac{1}{7}$ e $P(M|B) = \frac{5}{6}$

Assim, considerando $P(B) = k$ e organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,65 = 0,35$
- $P(M \cap B) = P(B) \times P(M|B) = k \times \frac{5}{6} = \frac{5k}{6}$
- $P(\overline{M} \cap B) = P(\overline{M}) \times P(B|\overline{M}) = 0,35 \times \frac{1}{7} = 0,05$

	B	\overline{B}	
M	$\frac{5k}{6}$		0,65
\overline{M}	0,05		0,35
	k		1

Logo, temos que:

$$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B) \Leftrightarrow k = \frac{5k}{6} + 0,05 \Leftrightarrow \frac{6k}{6} - \frac{5k}{6} = 0,05 \Leftrightarrow \frac{k}{6} = 0,05 \Leftrightarrow k = 0,3$$

Assim, temos que:

$$P(M \cap B) = \frac{5k}{6} \underset{k=0,3}{=} \frac{5 \times 0,3}{6} = 0,25$$

Logo, a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis, na forma de percentagem, é 40%, é:

$$P(M \cap \overline{B}) = P(M) - P(M \cap B) = 0,65 - 0,25 = 0,4$$



4. Como os pontos pertencem a duas retas, os 5 pontos da reta r são colineares, pelo que nenhum conjunto de 3 destes pontos define um triângulo, assim como acontece para os n pontos da reta s .

Desta forma, para definir um triângulo com 3 destes pontos é necessário seleccionar 2 pontos da reta r e 1 ponto da reta s (${}^5C_2 \times {}^n C_1$ triângulos distintos deste tipo), ou em alternativa, seleccionar 1 ponto da reta r e 2 pontos da reta s (${}^5C_1 \times {}^n C_2$ triângulos distintos deste tipo).

Como é possível definir exactamente 175 triângulos, temos que:

$${}^5C_2 \times {}^n C_1 + {}^5C_1 \times {}^n C_2 = 175$$

Resolvendo a equação anterior, determinamos o valor de n :

$$\begin{aligned} {}^5C_2 \times {}^n C_1 + {}^5C_1 \times {}^n C_2 = 175 &\Leftrightarrow \frac{5!}{2!3!} \times n + \frac{n!}{2!(n-2)!} \times 5 = 175 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} \times n + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2!(n-2)!} \times 5 = 175 &\Leftrightarrow \frac{5 \times 4 \times n}{2!} + \frac{n \times (n-1) \times 5}{2!} = 175 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{20n}{2} + \frac{(n^2 - n) \times 5}{2} = 175 &\Leftrightarrow 20n + 5n^2 - 5n = 350 \Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 350 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \vee n = -10 \end{aligned}$$

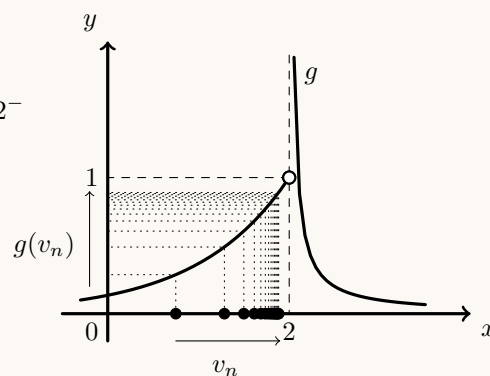
Como n é o número de ponto marcados sobre a reta s , então $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $n = 7$

5. Temos que:

$$\lim (v_n) = \lim \left(2 - \frac{5}{n+3} \right) = 2 - \frac{5}{+\infty + 3} = 2 - \frac{5}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^-$$

Então vem que:

$$\lim g(v_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1$$



Resposta: **Opção B**



6. De acordo com o enunciado temos que:

- $u_6 + u_{20} = -5$
- $u_{19} = 4 \times u_7$

Assim, resolvendo o sistema seguinte, usando a expressão do termo geral de uma progressão aritmética ($u_n = u_1 + r(n - 1)$), determinamos o valor do primeiro termo (u_1) e da razão (r) da progressão:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4 \times u_7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + r(6 - 1) + u_1 + r(20 - 1) = -5 \\ u_1 + r(19 - 1) = 4(u_1 + r(7 - 1)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5r + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4u_1 + 4 \times 6r \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ u_1 + 18r = 4u_1 + 24r \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ 18r - 24r = 4u_1 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -6r = 3u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -\frac{6}{3}r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ -2r = u_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4r + 24r = -5 \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20r = -5 \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{5}{20} \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ -2\left(-\frac{1}{4}\right) = u_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, temos que a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão, S_{16} , é:

$$\begin{aligned} S_{16} &= \frac{u_{16} + u_1}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + 15\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{15}{4}}{2} \times 16 = \\ &= \left(1 - \frac{15}{4}\right) \times 8 = 8 - \frac{15 \times 8}{4} = 8 - 15 \times 2 = 8 - 30 = -22 \end{aligned}$$

7. Como $z \times w = i \Leftrightarrow w = \frac{i}{z}$, logo temos que uma expressão do número complexo w , é:

$$w = \frac{i}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{6\pi}{10}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)}$$

Assim, como $\arg(w) = -\frac{\pi}{10}$, temos que $-\frac{\pi}{10} + 2\pi$ também é um argumento do número complexo w , ou seja:

$$\arg(w) = -\frac{\pi}{10} + 2\pi = -\frac{\pi}{10} + \frac{20\pi}{10} = \frac{19\pi}{10}$$

Resposta: **Opção A**



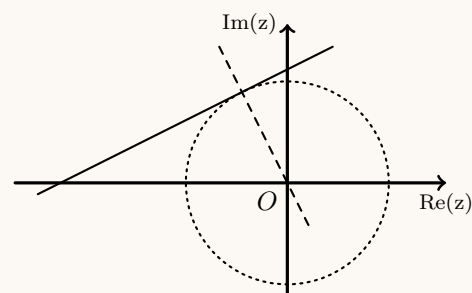
8. Considerando cada pontos do plano complexo na forma $z = x + yi$, temos que os pontos da reta são da forma:

$$\begin{aligned} (1 + 2i)(x + yi) + (1 - 2i)(x - yi) + 10 = 0 &\Leftrightarrow x + yi + 2xi + 2yi^2 + x - yi - 2xi + 2yi^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + 2y(-1) + 2y(-1) + 10 = 0 &\Leftrightarrow 2x - 2y - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 5 = 2y \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{5}{2} = y \end{aligned}$$

Assim, de todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta, o que tem menor módulo, ou seja, o que está mais próximo da origem do plano complexo, é o ponto de tangência da circunferência tangente à reta e que passa na origem, ou seja a interseção com a reta perpendicular à dada que contém a origem.

Relativamente à reta perpendicular, sabemos que o declive é o simétrico do inverso do declive da reta dada e que a ordenada na origem é nula (porque contém a origem), ou seja, é definida por:

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}}x + 0 \Leftrightarrow y = -2x$$



Desta forma, as coordenadas do ponto de interseção das duas retas no plano complexo, ou seja, o afixo do número complexo pretendido são:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y = x + 5 \\ y = -2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2x) = x + 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{5} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Desta forma temos que o número complexo cujo afixo está sobre a reta e que tem menor módulo é $-1 + 2i$



9.

9.1. Como o domínio da função é \mathbb{R} , podem existir assíntotas horizontais do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} = \frac{-\infty - e^{-(-\infty)}}{-\infty} = \frac{-\infty - e^{+\infty}}{-\infty} = \frac{-\infty - \infty}{-\infty} = \frac{-\infty - \infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y - e^{-(-y)}}{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y - e^y}{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y + e^y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y} + \frac{e^y}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y} + \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right) = \frac{\sqrt{(+\infty)^2 + 1}}{+\infty + 1} - 3 = \frac{\sqrt{+\infty}}{+\infty} - 3 = \frac{+\infty}{+\infty} - 3 \text{ (Indeterminação)}$$

(Como $x \rightarrow +\infty$ então $x > 0$ e assim, temos que $\sqrt{x^2} = x$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \\ &= -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \\ &= -3 + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(+\infty)^2}}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = -3 + \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + 0} = -3 + 1 = -2 \end{aligned}$$

Desta forma temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$, pelo que não existe assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$ e $y = -2$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f , observada quando $x \rightarrow +\infty$



9.2. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa -2 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x - e^{-x}}{x} \right)' = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} = \\ &= \frac{((x) - (e^{-x})') \times x - (x - e^{-x}) \times 1}{x^2} = \frac{(1 - (-x)'e^{-x}) \times x - x + e^{-x}}{x^2} = \frac{(1 + e^{-x})x - x + e^{-x}}{x^2} \end{aligned}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa -2 é:

$$\begin{aligned} m = f'(-2) &= \frac{(1 + e^{-(-2)})(-2) - (-2) + e^{-(-2)}}{(-2)^2} = \frac{(1 + e^2)(-2) + 2 + e^2}{4} = \\ &= \frac{-2 - 2e^2 + 2 + e^2}{4} = \frac{-2e^2 + e^2}{4} = -\frac{e^2}{4} \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -\frac{e^2}{4}x + b$

Como $f(-2) = \frac{-2 - e^{-(-2)}}{-2} = \frac{-2 - e^2}{-2} = 1 + \frac{e^2}{2}$, sabemos que o ponto $P\left(-2, 1 + \frac{e^2}{3}\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b :

$$1 + \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \Leftrightarrow 1 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$



10. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\sin x + \cos^2 x)' = (\sin x)' + (\cos x \times \cos x)' = \cos x + (\cos x)' \times \cos x + \cos(x) \times (\cos x)' = \\ &= \cos x + (-\sin x) \times \cos x + \cos(x) \times (-\sin x) = \cos x - 2 \sin x \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, vem:

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x(1 - 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee -2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

- $\cos x > 0$, pelo que $\cos x = 0$ é uma condição impossível
- $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Assim, temos que $h'(x)$ tem um zero em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	+	+	+	+	n.d.
$1 - 2 \sin x$	+	+	0	-	n.d.
h'	+	+	0	-	n.d.
h	min.	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow	n.d.

Assim, podemos concluir que a função h :

- é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- tem um mínimo relativo para $x = 0$, cujo valor é:

$$h(0) = \sin 0 + \cos^2 0 = 0 + (1)^2 = 0 + 1 = 1$$

- tem um máximo relativo para $x = \frac{\pi}{6}$, cujo valor é:

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

11.

11.1. Como no instante t_1 a temperatura da substância foi 30°C , temos que:

$$\begin{aligned} T(t_1) = 30 &\Leftrightarrow 20 + 100e^{-k \cdot t_1} = 30 \Leftrightarrow 100e^{-k \cdot t_1} = 30 - 20 \Leftrightarrow e^{-k \cdot t_1} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow e^{-k \cdot t_1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -k \cdot t_1 \Leftrightarrow k \cdot t_1 = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow k = \frac{-\ln 1 - \ln 10}{t_1} \Leftrightarrow k = \frac{-0 + \ln 10}{t_1} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**



11.2. Determinando a taxa média de variação da função T relativa aos primeiros t_2 minutos, ou seja, no intervalo $[0, t_2]$, temos:

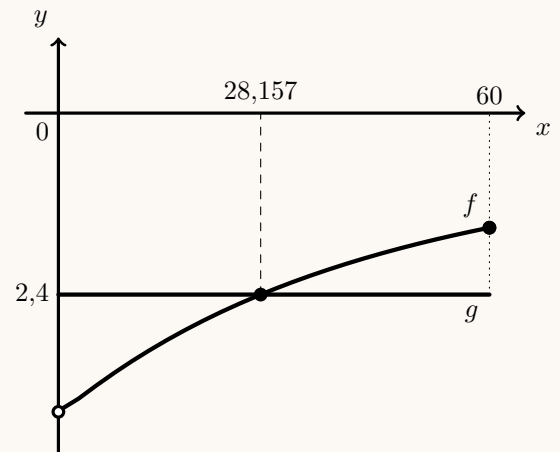
$$\begin{aligned} TMV_{[0, t_2]} &= \frac{T(t_2) - T(0)}{t_2 - 0} = \frac{20 + 100e^{-0,04t_2} - (20 + 100e^{-0,04 \times 0})}{t_2} = \frac{20 + 100e^{-0,04t_2} - 20 - 100e^0}{t_2} = \\ &= \frac{100e^{-0,04t_2} - 100 \times 1}{t_2} = \frac{100e^{-0,04t_2} - 100}{t_2} \end{aligned}$$

Assim, como durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2,4$, o valor de t_2 é a solução da equação:

$$\frac{100e^{-0,04t_2} - 100}{t_2} = -2,4$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = \frac{100e^{-0,04x} - 100}{x}$ e $g(x) = -2,4$, para $0 < x \leq 60$, reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) das coordenadas do ponto de interseção, cuja abcissa é o valor de t_2 :

$$(28,157 \quad -2,4)$$



Assim temos que o instante $t_2 \approx 28,157$, e como 0,157 minutos corresponde a $0,157 \times 60 \approx 9$ temos que o instante t_2 ocorreu aos 28 minutos e 9 segundos.

12. Determinando os limites laterais, temos:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) = \frac{0}{0} + k$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + k \right) = \frac{0 - 1}{0 - 1} + k = 1 + k$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x \ln x) = 2 + 0 \times (-\infty)$ (Indeterminação)
(considerando $y = \frac{1}{x}$, temos $x = \frac{1}{y}$ e se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln \frac{1}{y}}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln 1 - \ln y}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{0 - \ln y}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{\ln y}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} 2 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Como $0 \notin D_g$, e existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, então os limites laterais são iguais, o que permite determinar o valor de k :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - 1 \Leftrightarrow k = 1$$



13. Determinando o domínio da condição, temos:

$$1 - x > 0 \wedge 3 - 2x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \wedge -2x > -3 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < 1$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} x \ln(1-x) - \ln(1-x) &= (1-x) \ln(3-2x) \Leftrightarrow \ln(1-x)(x-1) = -(x-1) \ln(3-2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(1-x) &= -\frac{(x-1) \ln(3-2x)}{x-1} \wedge \underbrace{x-1 \neq 0}_{\text{Cond. universal no domínio}} \Leftrightarrow \ln(1-x) = -\ln(3-2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(1-x) + \ln(3-2x) &= 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) + \ln(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln((1-x)(3-2x)) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1-x)(3-2x) &= e^0 \Leftrightarrow 3-2x-3x+2x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee \underbrace{x=2}_{\text{Cond. impossível no domínio}} \end{aligned}$$

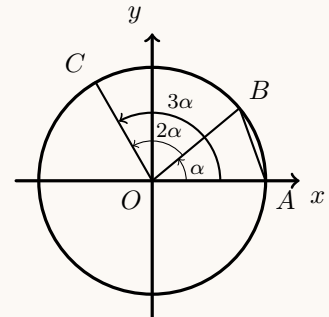
$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

14. Designado a amplitude do ângulo AOB por α , temos que:

- $\hat{AOB} = \alpha$
- $\hat{BOC} = 2 \times \hat{AOB} = 2\alpha$
- $\hat{AOC} = \hat{AOB} + \hat{BOC} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$

Como o triângulo $[AOB]$ tem área k , considerando o lado $[OA]$ como a base, temos que a altura é $\text{sen } \alpha$, pelo que:

$$A_{[AOB]} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \text{sen } \alpha}{2} = k \Leftrightarrow 1 \times \text{sen } \alpha = 2k \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = 2k$$



E assim, vem que:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow (2k)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 4k^2$$

Como a ordenada do ponto C é $\text{sen}(3\alpha)$, e como:

- $\text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(2\alpha + \alpha)$
- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$
- $\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$

Então, vem que:

$$\begin{aligned} y_C &= \text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(2\alpha + \alpha) = \text{sen}(2\alpha) \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cos(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha \times \cos \alpha + \text{sen } \alpha (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = \\ &= 2 \text{sen } \alpha \cos^2 \alpha + 2k \times (1 - 4k^2 - (2k)^2) = 2 \times 2k \times (1 - 4k^2) + 2k(1 - 4k^2 - 4k^2) = 4k(1 - 4k^2) + 2k(1 - 8k^2) = \\ &= 4k - 16k^3 + 2k - 16k^3 = 6k - 32k^3 \end{aligned}$$

