Exame final nacional de Matemática A **(2022, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1. Para cada uma das expressões apresentadas, considerando que

   - se n é par, então $(-1)^n = 1$;
   - se n é ímpar, então $(-1)^n = -1$;

   temos que:

   - $(-1)^n \times n$ não representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left((-1)^n \times n\right) = \lim n = +\infty$
     n ímpar: $\lim\left((-1)^n \times n\right) = \lim(-n) = -\infty$

   - $\dfrac{(-1)^n}{n}$ representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$
     n ímpar: $\lim\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \lim\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$

   - $(-1)^n + n$ não representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left((-1)^n + n\right) = \lim n = +\infty$
     n ímpar: $\lim\left((-1)^n + n\right) = \lim(-1+n) = +\infty$

   - $(-1)^n - n$ não representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left((-1)^n - n\right) = \lim(1-n) = -\infty$
     n ímpar: $\lim\left((-1)^n - n\right) = \lim(-1-n) = -\infty$

   Resposta: **Opção B**

2. Como a soma dos 5 primeiro termos da progressão geométrica é 211 e a razão é $\dfrac{2}{3}$, calculando o primeiro termo (u_1), temos:

$$S_5 = 211 \Leftrightarrow 211 = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 211 = u_1 \times \frac{211}{81} \Leftrightarrow \frac{211 \times 81}{211} = u_1 \Leftrightarrow 81 = u_1$$

   E assim, o 5.º termo (u_5), é:

$$u_5 = u_1 \times r^4 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16$$

3. Temos que:

   - Como $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cap B) = 0$
   - $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
   - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow 0{,}6 = P(A) + 0{,}4 - 0 \Leftrightarrow 0{,}6 - 0{,}4 = P(A) \Leftrightarrow 0{,}2 = P(A)$

   E assim: $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

   Resposta: **Opção D**

4. Se as duas peças a colocar no tabuleiro foram da mesma cor, interessa selecionar 2 das 12 posições do tabuleiro, sem considerar a ordem relevante $(^{12}C_2)$ porque as peças a colocar são iguais, e o número de seleções possíveis deve ser multiplicado por 3 porque existem 3 cores para as peças a colocar (verdes, amarelas e encarnadas). Ou seja, o número de formas diferentes de dispor duas peças da mesma cor no tabuleiro é:

   $$3 \times ^{12} C_2$$

   Se as duas pelas foram de cores distintas, interessa selecionar 2 das 3 cores disponíveis $(^{3}C_2)$, e para cada um destes pares de cores, escolher 2 das 12 posições do tabuleiro, considerando a ordem relevante $(^{12}A_2)$ porque as peças a colocar são diferentes. Ou seja, o número de formas diferentes de dispor duas peças decor diferentes no tabuleiro é:

   $$^3C_2 \times ^{12} A_2$$

   Como é possível, em alternativa, obter qualquer um destes dois tipos de configurações temos que o número de configurações coloridas diferentes que é possível obter é:

   $$3 \times ^{12} C_2 + ^3 C_2 \times ^{12} A_2$$

5. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da que participou no torneio de jogos matemáticos, e os acontecimentos:
   S:≪O aluno jogo Semáforo≫
   R:≪O aluno jogou Rastros≫

   Temos que $P\left(S\right) = \frac{1}{2}$, $P\left(\overline{R}\right) = \frac{1}{4}$ e $P\left(S|\overline{R}\right) = \frac{1}{5}$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P\left(S \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P\left(S|\overline{R}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$
   - $P\left(S \cap R\right) = P(S) - P\left(S \cap \overline{R}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$
   - $P(R) = 1 - P\left(\overline{R}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

	S	$\overline{S}$	
R	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{R}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

   Assim, a probabilidade de um aluno que participou no torneio escolhido, ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros, na forma de fração irredutível, é:

   $$P\left(\overline{S} \cap R\right) = P(R) - P(S \cap S) = \frac{3}{4} - \frac{9}{20} = \frac{3}{10}$$

6.

6.1. Como se pretende identificar um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone, então os respetivos vetores normais devem ser perpendiculares, pelo que calculamos os produtos escalares entre os vetores normais dos planos definidos em cada uma das hipóteses o vetor normal do plano que contém a base do cone para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar planos perpendiculares:

- $(0,4,-3).(0,4,-3) = 0 + 4 \times 4 + (-3) \times (-3) = 16 + 9 = 25$
- $(3,4,1).(0,4,-3) = 3 \times 0 + 4 \times 4 + 1 \times (-3) = 0 + 16 - 3 = 13$
- $(0,3,4).(0,4,-3) = 0 + 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 12 - 12 = 0$
- $(1,3,4).(0,4,-3) = \times 0 + 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0 + 12 - 12 = 0$

Assim, temos que apenas as equações apresentadas nas opções (C) e (D) representam planos perpendiculares ao plano que contém a base do cone, pelo que resta verificar qual das duas equações é verificada pelas coordenadas do ponto $(1,2,-1)$, substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

- $3(2) + 4(-1) = 18 \Leftrightarrow 6 - 4 = 18 \Leftrightarrow 2 = 18$ (Proposição falsa)
- $1 + 3(2) + 4(-1) = 3 \Leftrightarrow 1 + 6 - 4 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$ (Proposição verdadeira)

Ou seja a equação $x + 3y + 4z = 3$ define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e passa no ponto de coordenadas $(1,2,-1)$

Resposta: **Opção D**

6.2. Como o cone é reto e o ponto A é a base do centro, temos que a reta AV é perpendicular ao plano que contém a base do cone, pelo que o vetor normal do plano ($\overrightarrow{u} = (0,4,-3)$) também é um vetor diretor da reta AV.

Como o ponto A pertence ao plano definido por $4y - 3z = 16$, e pertence ao eixo Oy, ou seja, tem cota nula, temos que a sua ordenada (y_A) é:

$$4y_A - 3(0) = 16 \Leftrightarrow 4y_A = 16 \Leftrightarrow y_A = \frac{16}{4} \Leftrightarrow y_A = 4$$

E assim,temos que as coordenadas do ponto A são $(0,4,0)$, e uma equação vetorial da reta AV é:

$$(x,y,z) = (0,4,0) + \lambda(0,4,-3), \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelo que a cota do ponto V, que pertence ao eixo Oz e, por isso tem coordenadas $(0,0,z_V)$, pode ser calculada por:

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0\lambda \\ 0 = 4 + 4\lambda \\ z_V = 0 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -4 = 4\lambda \\ z_V = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \lambda \\ z_V = -3(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \lambda \\ z_V = 3 \end{cases}$$

Desta forma, recorrendo ao teorema de Pitágoras calculamos a altura do cone ($\overline{AV}$):

$$\overline{AV}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OV}^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = y_A^2 + z_V^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = 4^2 + 3^2 \underset{\overline{AV}>0}{\Rightarrow} \overline{AV} = \sqrt{16+9} \Leftrightarrow \overline{AV} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AV} = 5$$

E assim, como o raio da base do cone é 3, o respetivo volume é:

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 5}{3} = 15\pi$$

7. Como a circunferência tem raio 3, o respetivo perímetro é $2 \times \pi \times 3 = 6\pi$

Assim, o comprimento do arco AB é 2π, a amplitude do ângulo ACB é:

$$\frac{A\hat{C}B}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi \times 3} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi \times 2\pi}{6\pi} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{4\pi}{6} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi}{3}$$

Desta forma, como ambos os vetores têm norma 3, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem:

$$\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB} = \cos\left(\overrightarrow{CB}\hat{\ }\overrightarrow{CB}\right) \times \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 3 \times 3 = -\frac{1}{2} \times 9 = -\frac{9}{2}$$

8.

8.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 2$, temos que verificar se $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

- $f(2) = \dfrac{e^{2-2}}{2+2} = \dfrac{e^0}{4} = \dfrac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{e^{2-x}}{x+2}\right) = \dfrac{e^{2-2}}{2+2} = \dfrac{e^0}{4} = \dfrac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4} = \dfrac{\operatorname{sen}(2-2)}{2^2-4} = \dfrac{\operatorname{sen}(0)}{4-4} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

(como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$)

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+2)}\right) =$$

(considerando $y = x - 2$, temos $x = y + 2$ e se $x \to 2^-$, então $y \to 0^-$)

$$= \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x+2)} = 1 \times \frac{1}{2+2} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Como $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 2$.

8.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]-\infty,-2[$:

$$f'(x)=\left(\frac{e^{2-x}}{x+2}\right)'=\frac{\left((2-x)'e^{2-x}\right)(x+2)-e^{2-x}\times(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{-1\times e^{2-x}\times(x+2)-e^{2-x}\times 1}{x^2}=$$

$$=\frac{-e^{2-x}(x+2)-e^{2-x}}{(x+2)^2}=\frac{e^{2-x}\left(-(x+2)-1\right)}{(x+2)^2}=\frac{e^{2-x}\left(-x-3\right)}{(x+2)^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]-\infty,-2[$:

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{e^{2-x}\left(-x-3\right)}{(x+2)^2}=0\ \Leftrightarrow\ e^{2-x}\left(-x-3\right)=0\ \wedge\ \underbrace{(x+2)^2\neq 0}_{\text{C. universal } (x+2)^2>0}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{e^{2-x}=0}_{\text{Impossível}}\ \vee\ -x-3=0\ \Leftrightarrow\ -3=x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	-3		-2
e^{2-x}	$+$	$+$	$+$	n.d.
$(-x-3)$	$+$	0	$-$	n.d.
$e^{2-x}(-x-3)$	$+$	0	$-$	n.d.
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	n.d.
f'	$+$	0	$-$	n.d.
f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $]-\infty,-3]$;
- é decrescente no intervalo $[-3,-2[$;
- tem um máximo relativo que é $f(-3)=\dfrac{e^{2-(-3)}}{-3+2}=\dfrac{e^{2+3}}{-1}=-e^5$

9.

9.1. Como o ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes, está a 5 metros de cada um dos postes, em particular está a 5 metros do poste da esquerda, pelo que $x=5$

Assim, a altura deste ponto é dada por

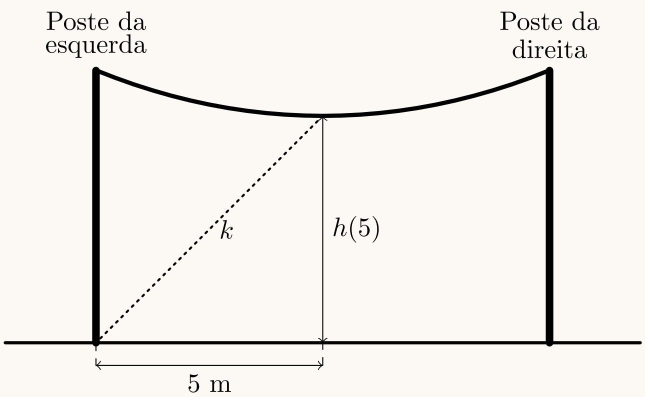
$$h(5)=6{,}3\left(e^{\frac{5-5}{12{,}6}}+e^{\frac{5-5}{12{,}6}}\right)-7{,}6=6{,}3\left(e^0+e^0\right)-7{,}6=6{,}3\times 2-7{,}6=5$$

Logo a a distância (k), arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo é dada por

$$k^2=5^2+5^2\ \Leftrightarrow\ k^2=25+25\ \Rightarrow$$

$$\underset{k>0}{\Rightarrow}\ k=\sqrt{50}\ \Rightarrow\ k\approx 7{,}1 \text{ m}$$

Resposta: **Opção A**



9.2. Como o ponto do cabo em causa está situado a d metros do poste da esquerda, a sua altura é $h(d)$.

Desta forma uma redução de 50% da distância, ou seja, a redução da distância para metade é expressa por $\frac{1}{2}d$, e a redução da altura em em 30 centímetros (0,3 metros) é expressa por $h(d) - 0{,}3$.

Logo, o valor da distância d é a solução da equação $h\left(\frac{1}{2}d\right) = h(d) - 0{,}3$

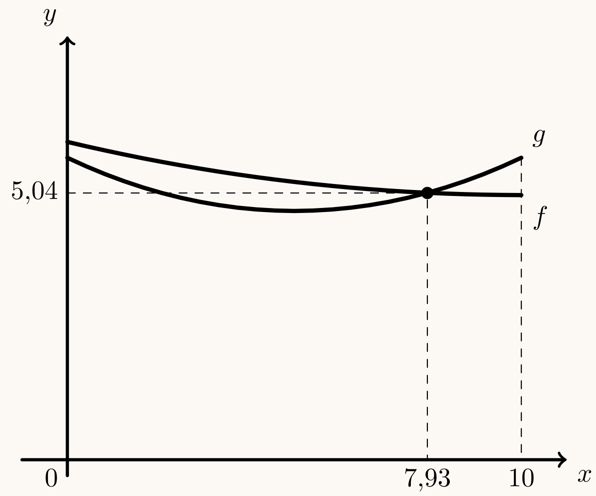
Assim, inserindo na calculadora a função $h(x) = 6{,}3\left(e^{\frac{x-5}{12{,}6}} + e^{\frac{5-x}{12{,}6}}\right) - 7{,}6$, determinamos o valor de d como a abcissa do ponto de interseção das funções:

- $f(x) = h\left(\frac{1}{2}x\right)$
- $g(x) = h(x) - 0{,}3$

Representando na calculadora as funções f e g, numa janela compatível com o domínio da função ($x \in [0{,}10]$), obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às décimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos:

7,9 metros.



10. Como $\operatorname{Im}(w) = -\operatorname{Re}(w)$, então w é um número complexo da forma $\rho e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ e como $\operatorname{Re}(w) > 1$, então $\rho > 1$

Assim, como $-i = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ temos que:

$$-iw^2 = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \times \left(\rho e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2 = e^{i\pi} \times \rho e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times \rho e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = (1 \times \rho \times \rho) e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \rho^2 e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} = \rho^2 e^{i\pi}$$

Como $\rho > 1$ então $\rho^2 > \rho$, então o afixo de iw^2 deve estar a uma distância da origem superior ao afixo de w, e como o afixo pertence ao semieixo real positivo (porque $\operatorname{Arg}(-iw^2) = \pi$), o ponto C é o único que pode representar o afixo de $-iw^2$.

Resposta: **Opção C**

11. Escrevendo $-\sqrt{3}+i$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2.º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Assim como $-\sqrt{3}+i = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$, e como $\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, temos que;

$$z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^6 e^{i\left(6\times\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i(2\pi)} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\times 0} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i\times 0}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2\}$$

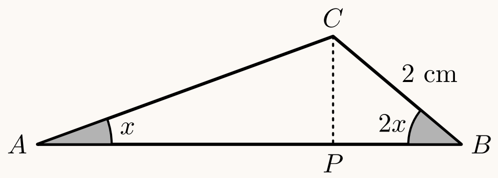
Assim, os três números complexos que são solução da equação, são:

- $(k=0) \rightarrow 2e^{i\left(\frac{2\times 0\times\pi}{3}\right)} = 2e^1 = 2$
- $(k=1) \rightarrow 2e^{i\left(\frac{2\times 1\times\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$
- $(k=2) \rightarrow 2e^{i\left(\frac{2\times 2\times\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

Como $\frac{4\pi}{3}$ é um ângulo do 3.º quadrante, temos que a solução da equação, cujo afixo pertence a este quadrante, escrita na forma algébrica, é:

$$2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1-\sqrt{3}i$$

12. Designado por P o pé da altura do triângulo relativo ao lado $[AB]$, temos que:



- $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\overline{CP}}{2} \Leftrightarrow \overline{CP} = 2\operatorname{sen}(2x)$
- $\cos(2x) = \frac{\overline{BP}}{2} \Leftrightarrow \overline{BP} = 2\cos(2x)$

Logo, temos que:

$$\operatorname{tg}x = \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg}x} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2\times 2\operatorname{sen}x\cos x}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}} \underset{\cos x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{4\operatorname{sen}x\cos x\times\cos x}{\operatorname{sen}x} \underset{\operatorname{sen}x\neq 0}{\Leftrightarrow} \overline{AP} = 4\cos^2 x$$

E assim, vem que:

$$\overline{AB} = \overline{AP}+\overline{BP} = 4\cos^2 x + 2\cos(2x) = 4\cos^2 x + 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = 4\cos^2 x + 2\left(\cos^2 x - (1-\cos^2 x)\right) =$$

$$= 4\cos^2 x + 2\left(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x\right) = 4\cos^2 x + 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 4\cos^2 x + 4\cos^2 x - 2 = 8\cos^2 x - 2$$

13. Como a função g é contínua (porque resulta da diferença e do produto de funções contínuas em $]1,+\infty[$), então a reta de equação $x=1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de g. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \big(5x - 3\ln(x-1)\big) = 5\times 1^+ - 3\ln(1^+ - 1) = 5 + 3\ln(0+) = 5 - 3\times(-\infty) = +\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, podemos concluir a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical do gráfico de g.

Como o domínio da função é $]1,+\infty[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$. Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y=mx+b$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x - 3\ln(x-1)}{x} = \underbrace{\frac{+\infty-\infty}{+\infty}}_{\text{Indeterminação}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5x}{x} - 3\times\frac{\ln(x-1)}{x}\times\frac{x-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(5 - 3\times\frac{\ln(x-1)}{(x-1)}\times\frac{x-1}{x}\right) =$$

(fazendo $y=x-1$, temos $x=y+1$; e se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$)

$$= \lim_{x\to+\infty} 5 - 3\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y+1} = 5 - 3\times 0\times \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y} = 5 - 3\times 0\times 1 = 5$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x)-mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x) - 5\times x\big) = \lim_{x\to+\infty}(5x - 3\ln x - 5x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\big(-3\ln x\big) = -3\lim_{x\to+\infty}\big(\ln x\big) = -3\times(+\infty) = -\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-mx\big)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de g.

14. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x\in\mathbb{R} : 5-2x>0 \wedge 3-x>0\}$

Como $-2x>-5 \wedge -x>-3 \Leftrightarrow 2x<5 \wedge x<3 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2} \wedge x<3 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$,

temos que $x\in\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$(e^x-1)\ln(5-2x) + e^x\ln(3-x) = \ln(3-x) \Leftrightarrow (e^x-1)\ln(5-2x) + e^x\ln(3-x) - \ln(3-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x-1)\ln(5-2x) + \ln(3-x)\big(e^x-1\big) = 0 \Leftrightarrow (e^x-1)\big(\ln(5-2x)+\ln(3-x)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x-1)\big(\ln\big((5-2x)\times(3-x)\big)\big) = 0 \Leftrightarrow (e^x-1)\big(\ln\big(15-5x-6x+2x^2\big)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x-1)\big(\ln\big(2x^2-11x+15\big) = 0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \vee \ln\big(2x^2-11x+15\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee 2x^2-11x+15 = e^0 \Leftrightarrow x = \ln 1 \vee 2x^2-11x+15 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee 2x^2-11x+14=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x = \frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4(2)(14)}}{2\times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=\frac{7}{2}$$

Assim, como $x<\frac{5}{2}$, $x=\frac{7}{2}$ não é solução da equação, pelo que o conjunto dos números reais que são solução da equação, é: $\{0,2\}$

15. Considerando a e b as abcissas dos pontos A e B, respetivamente, temos que as ordenadas são, respetivamente $\frac{k}{a}$ e $\frac{k}{b}$, pelo que o declive da reta AB é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b-a} = \frac{\frac{ak}{ab} - \frac{bk}{ab}}{b-a} = \frac{\frac{ak-bk}{ab}}{b-a} = \frac{k(a-b)}{ab(b-a)} = \frac{k(a-b)}{ab \times (-1)(a-b)} \underset{a \neq b}{=} \frac{k}{-ab} = -\frac{k}{ab}$$

Considerando c como a abcissa do ponto em que a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta AB, temos que $m = f'(c)$. Assim temos que:

$$f'(x) = \left(\frac{k}{x}\right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} = \frac{0 \times x - 1 \times k}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$$

E assim, $f'(c) = -\frac{k}{c^2}$, temos que:

$$m = f'(c) \Leftrightarrow -\frac{k}{ab} = -\frac{k}{c^2} \Leftrightarrow \frac{k}{ab} = \frac{k}{c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{k \times ab}{k} \underset{k \neq 0}{\Leftrightarrow} c^2 = ab \underset{c>0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{ab}$$

Como $a < b$, então temos que:

- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{a} < \sqrt{b} \times \sqrt{a} \Leftrightarrow a < \sqrt{ab}$
- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} < \sqrt{b} \times \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} < b$

Assim, temos que $a < \sqrt{ab} < b$, e ainda que a, $\sqrt{ab}$ e b são termos consecutivos de uma progressão geométrica, porque o quociente dos termos consecutivos é constante (e igual à razão), ou seja:

$$\frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^2 = a \times b \Leftrightarrow ab = ab \text{ (Proposição verdadeira)}$$