EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.°, 2.° e 5.° cursos)

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
2000 — **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \frac{1+i}{i}, \quad z_2 = 3+3i \quad \text{e} \quad z_3 = 2\,cis\frac{\pi}{3} \qquad (\,i \text{ é a unidade imaginária})$$

1.1. Determine z_1 na forma algébrica.

1.2. Determine $z_2^2 \,.\, z_3$ na forma trigonométrica.

1.3. Represente, no plano de Argand, o conjunto definido pela condição

$$z\,.\,\overline{z} \leq 9 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{5\pi}{4} \qquad (\overline{z} \text{ designa o conjugado de } z).$$

2.

2.1. Considere o conjunto $A = \{\, x \in \mathbb{R} : |x^2 + 3x| \leq 4 \,\}$

2.1.1. Verifique que $A = [\,-4, 1]$

2.1.2. Sendo $B = A \cup \{\,-1, 2\}$, determine o interior e a fronteira do conjunto B.

2.2.

2.2.1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+k}$

Aplicando o teorema das sucessões enquadradas, determine $\lim u_n$

2.2.2. Determine $\lim \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^{4n}$

V.S.F.F.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x (x^2 + x)$

3.1. Verifique que $f'(x) = e^x (x^2 + 3x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

3.2. Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3.3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

4. Considere a função $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x + log\, x$
(log designa logaritmo de base e).

4.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x)-1}{sen(x-1)}$

4.2. Seja a um número real maior do que 1.
Aplique o Teorema de Lagrange à função g no intervalo $[1, a]$ para mostrar que $log\, a < a - 1$

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere os semigrupos comutativos $(\mathbb{R}, \theta)$ e $(\mathbb{R}, \phi)$, sendo as operações θ e ϕ definidas por:

$$a\,\theta\, b = a + b - 3\,, \qquad a\,\phi\, b = a\,b - 3\,a - 3\,b + 12\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

A.1. Determine $(-1\ \theta\, 2)\,\phi\, 4$

A.2. Mostre que $(\mathbb{R}, \theta)$ é um grupo.

A.3. Mostre que $(\mathbb{R}, \theta, \phi)$ é um anel com elemento unidade.

B. Considere a parábola P definida pela equação $y = x^2 - 2x - 1$

B.1. Justifique que o vértice da parábola P é o ponto de coordenadas $(1, -2)$

B.2. Mostre que a directriz da parábola P é a recta de equação $y = -\dfrac{9}{4}$

B.3. Determine uma equação de uma parábola que tenha a mesma directriz da parábola P e cuja concavidade esteja voltada para baixo.

FIM

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	10	
	1.2.	15	
	1.3.	15	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1.	14	
	2.1.2.	6	
	2.2.	30	
	2.2.1.	15	
	2.2.2.	15	
3.			**40**
	3.1.	10	
	3.2.	15	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A			**40**
	A.1.	10	
	A.2.	15	
	A.3.	15	

ou

B			**40**
	B.1.	10	
	B.2.	15	
	B.3.	15	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2000

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40**
1.1.		10	
1.2.		15	
1.3.		15	
2.			**50**
2.1.		20	
2.1.1.	14		
2.1.2.	6		
2.2.		30	
2.2.1.	15		
2.2.2.	15		
3.			**40**
3.1.		10	
3.2.		15	
3.3.		15	
4.			**30**
4.1.		15	
4.2.		15	
A			**40**
A.1.		10	
A.2.		15	
A.3.		15	
ou			
B			**40**
B.1.		10	
B.2.		15	
B.3.		15	
Total			**200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

$\frac{1+i}{i} =$

$= \frac{(1+i)\,.\,(-i)}{i\,.\,(-i)} =$ 3

$= \frac{-i+1}{1} =$ 6

$= 1 - i$ 1

2.º Processo

$\frac{1+i}{i} =$

$= \frac{(1+i)\,.\,i}{i\,.\,i} =$ 3

$= \frac{i-1}{-1} =$ 5

$= 1 - i$ 2

3.º Processo

$\frac{1+i}{i} =$

$= \frac{1}{i} + 1 =$ 3

$= 1 - i$ 7

1.2. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

$z_2 = \sqrt{18}\ cis\ \frac{\pi}{4}$ 5

$z_2^2 = 18\ cis\ \frac{\pi}{2}$ 5

$z_2^2 \,.\, z_3 = 36\ cis\ \frac{5\pi}{6}$ 5

2.º Processo

$z_2^2 = 18\,i$ 3

$z_3 = 1 + \sqrt{3}\,i$ 4

$z_2^2 \,.\, z_3 = -18\sqrt{3} + 18\,i$ 4

$z_2^2 \,.\, z_3 = 36\ cis\ \frac{5\pi}{6}$ 4

3.º Processo

$z_2^2 = 18\,i$ 3

$z_2^2 = 18\ cis\ \frac{\pi}{2}$ 7

$z_2^2 \,.\, z_3 = 36\ cis\ \frac{5\pi}{6}$ 5

1.3. .... **15**

Representar o conjunto definido por $z\,.\,\overline{z} \leq 9$ 8

$z\,.\,\overline{z} \leq 9 \;\Leftrightarrow\; |\,z\,| \leq 3$ 5
Representar o círculo 3

ou

$z\,.\,\overline{z} \leq 9 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 \leq 9$ 5
Representar o círculo 3

Representar o conjunto definido por $\frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$ 5

Representar as duas semi-rectas .... 4 (2+2)
Assinalar a região compreendida entre
as duas semi-rectas 1

Assinalar a intersecção dos dois conjuntos 2

V.S.F.F.

2.1.1. .... **14**

$|x^2+3x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x^2+3x \leq 4$ 4

$x^2+3x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$ 4

$x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=1$ 2
Justificar que $-4 \leq x \leq 1$ **(ver nota 1)** 2

Concluir que a condição $x^2+3x \geq -4$ é universal 4
Concluir que a equação $x^2+3x+4=0$
é impossível 2
Justificar que a condição $x^2+3x+4 \geq 0$
é universal **(ver nota 2)**.................. 2

Justificar que $A=[-4,1]$ **(ver nota 3)** 2

Notas:

1. A justificação pode ser feita por meio de um esboço da parábola de equação $y=x^2+3x-4$
2. A justificação pode ser feita por meio de um esboço da parábola de equação $y=x^2+3x+4$
3. A justificação pode ser feita evocando que a conjunção de uma condição universal com outra condição é equivalente a esta outra, ou referindo que $\mathbb{R} \cap [-4,1]=[-4,1]$

2.1.2. .... **6**

$B=[-4,1] \cup \{2\}$ 2

Interior de $B=]-4,1[$ 2

Fronteira de $B=\{-4,1,2\}$ 2

Nota:
Se o examinando indicar outro conjunto para B, deve cotar-se na totalidade a determinação correcta do interior e da fronteira desse conjunto, desde que o grau de dificuldade não tenha sido alterado.
Se o examinando indicar para B um intervalo, deve cotar-se com dois pontos a determinação correcta do interior e da fronteira desse conjunto (um ponto para o interior e outro ponto para a fronteira).

2.2.1. .... **15**

Enquadrar u_n 9

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+1}$$ 5

$$\frac{2n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{2n^2}{n^2+1}$$ 4

Observação: se o examinando trocar a ordem das expressões que enquadram u_n, só deverá receber a cotação referente ao segundo passo (4 pontos).

Concluir que $\lim u_n = 2$ 6

$$\lim \frac{2n^2}{n^2+n} = 2$$ 2

$$\lim \frac{2n^2}{n^2+1} = 2$$ 2

Conclusão 2

Nota:
A resolução aqui apresentada é, talvez, a mais natural. O examinando pode, no entanto, escolher outro enquadramento, desde que o prove devidamente.
É válido, por exemplo, o seguinte enquadramento: $\frac{2n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq 2$.

2.2.2. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

1.º Processo

$$\lim \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^{4n} =$$

$$= \lim \left(\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}\right)^{4n}$$ 3

$$= \lim \left(\frac{1}{1+\frac{6}{4n}}\right)^{4n}$$ 7

$$= \frac{1}{e^6}$$ 5

2.º Processo

$\lim \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^{4n} =$

$= \lim \left(\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}\right)^{4n}$ 3

$= \lim \left[\left(\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}\right)^{2n}\right]^2$ 6

$= \left(\frac{1}{e^3}\right)^2$ 5

$= \frac{1}{e^6}$ 1

3.º Processo

$\lim \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^{4n} =$

$= \lim \left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{-4n}$ 4

$= \lim \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{-4n}$ 2

$= \lim \left[\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{2n}\right]^{-2}$ 3

$= (e^3)^{-2}$ 5

$= e^{-6}$ 1

4.º Processo

$\lim \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^{4n} =$

$= \lim \left(1 - \frac{3}{2n+3}\right)^{4n}$ 4

$= \lim \left[\left(1 - \frac{3}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^{\frac{4n}{2n+3}}$ 3

$= (e^{-3})^2$ 7

$= e^{-6}$ 1

3.1. .... **10**

Verificar que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ 3

$f'(x) =$

$= e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1)$ 2

$= e^x(x^2 + 3x + 1)$ 1

$f'(0) = 1$ 2

$f\ (0) = 0$ 2

Escrever uma equação da recta pedida 3

3.2. .... **15**

Determinar $f''(x)$ 3

$f''(x) =$

$= e^x(x^2 + 3x + 1) + e^x(2x + 3)$ 2

$= e^x(x^2 + 5x + 4)$ 1

Determinar os zeros de f'' 3

$e^x(x^2 + 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$ 1

$\Leftrightarrow x = -4 \ \vee \ x = -1$ 2

Estudar o sinal de f'' 4

Concluir que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima nos intervalos $]-\infty, -4[$ e $]-1, +\infty[$ e voltada para baixo no intervalo $]-4, -1[$ 3

Concluir que o gráfico de f tem dois pontos de inflexão 2

3.3. .... **15**

Referir que, pelo facto de f ser contínua em $\mathbb{R}$, não existem assimptotas verticais do gráfico de f 3

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 1)** 3

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 2)** 6

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x (x^2 + x) =$ **(ver nota 3)**

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{e^{-x}}$ 2

$= 0$ 4

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$ 2

Notas:

1. O examinando pode determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, em vez de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, e, verificando que o limite é $+\infty$, concluir, correctamente, que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

2. O examinando pode:

- começar por determinar $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- concluir que $m = 0$
- determinar, em seguida, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m\,x] = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Se o examinando optar por este processo, os seis pontos previstos para o cálculo de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 3

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 3

A distribuição de cada um destes três pontos é idêntica à distribuição dos seis pontos, indicada acima para o cálculo de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, com a diferença de, em vez de ser 2 + 4, deverá ser 1 + 2.

3. O examinando pode indicar (ou não) que se está perante a indeterminação $0 \times \infty$. Se não o fizer, não deverá ser penalizado. Se o fizer, e não prosseguir o cálculo, ou prosseguir incorrectamente, deverá receber 1 ponto por essa indicação.

4.1. .... **15**

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x + log\, x - 1}{sen(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1 + \frac{1}{x}}{cos\,(x-1)}$ 10

Aplicar a Regra de Cauchy 3
Derivar correctamente o numerador 4
Derivar correctamente o denominador 3

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 + \frac{1}{x}}{cos\,(x-1)} = 2$ 5

4.2. .... **15**

Referir que a função g está nas condições de aplicabilidade do Teorema de Lagrange no intervalo $[1, a]$ 2

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 3

Concluir que existe pelo menos um número real c, pertencente ao intervalo $]1, a[$, tal que $1 + \frac{1}{c} = \frac{g(a) - g(1)}{a - 1}$ 3

$1 + \frac{1}{c} = \frac{g(a) - g(1)}{a - 1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c} = \frac{a + log\,(a) - 1}{a - 1}$ 1

Restante resolução 6

A.1. .... **10**

$(-1\,\theta\,2)\,\phi\,4 =$
$= (-1\ +2-3)\,\phi\,4$ 3
$=\ -\ 2\,\phi\,4$ 1
$=\ -\ 8+6-12+12$ 5
$=\ -\ 2$ 1

A.2. .... **15**

Determinar o elemento neutro (3) 5
Determinar o oposto de x $(6-x)$ 5
Referir que todos os elementos têm oposto 3
Concluir que $(\mathbb{R},\theta)$ é um grupo 2

A.3. .... **15**

Verificar a distributividade 7
Concluir que $(\mathbb{R},\theta,\phi)$ é um anel 3
Determinar o elemento unidade (4) 5

B.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

$y = x^2-2x-1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = y+2$ 8
Conclusão 2

2.º Processo

$y'(x) = 2x-2$ 3
$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 3
$x = 1 \Rightarrow y =\ -2$ 3
Conclusão 1

3.º Processo

Determinar a abcissa do vértice utilizando propriedades da
função quadrática 6
Determinar a ordenada do vértice 3
Conclusão 1

B.2. .... **15**

$2\,p = 1$ 5

$p/2 = 1/4$ 5

Conclusão 5

B.3. .... **15**

Se o examinando se limitar a apresentar uma equação de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, mas cuja directriz não seja a mesma da parábola P, deverá receber a cotação de 3 pontos.