EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos | **1.ª FASE**
2000 | **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = 2 - 2i\,,\quad z_2 = 2\,cis\frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad z_3 = \frac{1}{2}\,cis\,\theta \qquad (\,i \text{ é a unidade imaginária})$$

1.1. Escreva z_1 na forma trigonométrica.

1.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $i\,z = z_1$

1.3. Determine uma expressão geral dos valores de θ para os quais $z_2 \,.\, z_3$ é um número imaginário puro.

2.

2.1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-4| \geq |2x+3|\}$

2.1.1. Verifique que $A = \left[-7, \frac{1}{3}\right]$

2.1.2. Sendo $B = A \cup \mathbb{N}$, determine a fronteira e o derivado do conjunto B.

2.2. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)$

2.2.1. Mostre que $u_n = n^2 + n$

2.2.2. Determine $\lim\left(1 + \frac{n+1}{u_n}\right)^{2n}$

V.S.F.F.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

3.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

3.2. Resolva a equação $log\,(f(x)) = x$ (log designa logaritmo de base e).

3.3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

4. Considere a função g, definida por $g(x) = \frac{\pi}{2} - arcsen\,(x+2)$
($arcsen$ designa a função inversa da restrição principal da função seno).

4.1. Determine o domínio e a expressão analítica da função inversa de g

4.2. Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to -1} \frac{g(x)}{e^{x+1} - 1}$

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere o conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$ e nele definida a multiplicação usual $\times$.

A.1. Justifique que:

A.1.1. $(A, \times)$ é um grupóide.

A.1.2. $(A, \times)$ é um semigrupo comutativo com elemento neutro.

A.2. Considere a função $h : A \longrightarrow A$, definida por $h(x) = -x$
Mostre que h é um isomorfismo de $(A, \times)$ sobre $(A, *)$, sendo a operação $*$ definida por $a * b = -a\,b, \quad \forall a, b \in A$

B. Considere a elipse definida pela equação $4\,(x+1)^2 + 9\,(y-2)^2 = 36$

B.1. Mostre que a distância focal da elipse é igual a $2\sqrt{5}$

B.2. Indique as coordenadas dos focos da elipse.

B.3. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da elipse com o eixo das abcissas.

FIM

COTAÇÕES

1.			**40**
1.1.		10	
1.2.		15	
1.3.		15	
2.			**50**
2.1.		20	
2.1.1.	14		
2.1.2.	6		
2.2.		30	
2.2.1.	15		
2.2.2.	15		
3.			**40**
3.1.		15	
3.2.		10	
3.3.		15	
4.			**30**
4.1.		15	
4.2.		15	
A			**40**
A.1.		25	
A.1.1.	10		
A.1.2.	15		
A.2.		15	
ou			
B			**40**
B.1.		15	
B.2.		10	
B.3.		15	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2000

1.ª FASE
2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	10	
	1.2.	15	
	1.3.	15	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1.	14	
	2.1.2.	6	
	2.2.	30	
	2.2.1.	15	
	2.2.2.	15	
3.			**40**
	3.1.	15	
	3.2.	10	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A			**40**
	A.1.	25	
	A.1.1.	10	
	A.1.2.	15	
	A.2.	15	
	ou		
B			**40**
	B.1.	15	
	B.2.	10	
	B.3.	15	
Total			**200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **10**

Determinar o módulo de z_1 3

Determinar um argumento de z_1 5

Escrever z_1 na forma trigonométrica 2

1.2. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

1.º Processo

$i\,z = z_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2-2\,i}{i}$ 6

$\Leftrightarrow z = -2-2\,i$ 9

2.º Processo
(substituindo z por $x + y\,i$)

$i\,(x + y\,i) = 2 - 2\,i$ 1

$\Leftrightarrow \; -y + x\,i = 2 - 2\,i$ 5

$\Leftrightarrow \; x = -2 \;\wedge\; y = -2$ 7

$z = \; -2 - 2\,i$ 2

3.º Processo

$i\,z = z_1 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\sqrt{8}\;cis\,\frac{7\pi}{4}}{cis\,\frac{\pi}{2}}$ 8

$\Leftrightarrow z = \sqrt{8}\;cis\,\frac{5\,\pi}{4}$ 7

4.º Processo
(substituindo z por $\rho\,cis\,\theta$)

$\left(cis\,\frac{\pi}{2}\right) . \left(\rho\,cis\,\theta\right) = \sqrt{8}\;cis\,\frac{7\pi}{4}$ .... 5 (3+1+1)

$\Leftrightarrow \rho\,cis\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sqrt{8}\;cis\,\frac{7\pi}{4}$ 3

$\Leftrightarrow \rho = \sqrt{8} \;\wedge\; \frac{\pi}{2} + \theta = \frac{7\pi}{4} + 2\,k\,\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}$ (ver **nota**) 4

$\Leftrightarrow \rho = \sqrt{8} \;\wedge\; \theta = \frac{5\pi}{4} + 2\,k\,\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}$ 1

$z = \sqrt{8}\;\; cis\,\frac{5\,\pi}{4}$ 2

Nota:
Se o examinando não indicar $k \in \mathbb{Z}$, deverá ser penalizado em 1 ponto.

1.3. .... **15**

$z_2 \cdot z_3 =$

$= \left(2\ cis \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\ cis\, \theta\right)$ 1

$= cis\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)$ 4

$\frac{2\pi}{3} + \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ (ver **nota**) 8

$\theta = -\ \frac{\pi}{6} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ 2

Nota:
Se o examinando não indicar $k \in \mathbb{Z}$, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2.1.1. .... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$|x-4| \geq |2x+3| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 \geq (2x+3)^2$ 2

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \geq 4x^2 + 12x + 9$ .... 4 (2+2)

$\Leftrightarrow 3x^2 + 20x - 7 \leq 0$ 3

$\Leftrightarrow x \in \left[-7, \frac{1}{3}\right]$ 5

2.º Processo

$|x-4| \geq |2x+3| \Leftrightarrow$ (para $x \neq -\ \frac{3}{2}$)

$\Leftrightarrow \left|\frac{x-4}{2x+3}\right| \geq 1$ 2

$\Leftrightarrow \frac{x-4}{2x+3} \leq -1 \ \vee\ \frac{x-4}{2x+3} \geq 1$ 2

$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{2x+3} \leq 0 \ \vee\ \frac{-x-7}{2x+3} \geq 0$ .... 2 (1+1)

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[-7, -\frac{3}{2}\right[$ .... 4 (2+2)

Verificar que $-\ \frac{3}{2}$ é solução da condição $|x-4| \geq |2x+3|$ 2

Concluir que $A = \left[-7, \frac{1}{3}\right]$ 2

2.1.2. .... **6**

Fronteira de $B = \left\{ -7, \frac{1}{3} \right\} \cup \mathbb{N}$ 3

Derivado de $B = \left[-7, \frac{1}{3} \right]$ 3

2.2.1. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\sum_{k=1}^{n} (2\,k) = \frac{2+2n}{2} \times n$ 12

$\frac{2+2n}{2} \times n = n^2 + n$ 3

2.º Processo (por indução)

Mostrar a igualdade para $n = 1$ 3
Provar a hereditariedade 12
Escrever a hipótese de indução 1
Escrever a tese de indução 1
Demonstração 10

2.2.2. .... **15**

$\lim \left(1 + \frac{n+1}{n^2+n}\right)^{2\,n} =$

$= \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2\,n}$ 8

$= e^2$ 7

V.S.F.F.

3.1. .... **15**

$f'(x) =$

$= \dfrac{e^x\,(x-1) - e^x}{(x-1)^2}$ 3

$= \dfrac{e^x\,(x-2)}{(x-1)^2}$ 2

Determinar o zero de f' 2

Estudar o sinal de f' 3

Concluir que f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, 2[$ (ver **nota**)............... 2

Concluir que f é crescente em $]2, +\infty[$ 2

Concluir que f tem extremo relativo para $x = 2$ 1

Nota:
Se o examinando escrever que f é decrescente em $]-\infty, 1[\ \cup\ ]1, 2[$ ou em $]-\infty, 2[$, deverá ter, neste passo, a cotação de zero pontos.

3.2. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Para $x > 1$, tem-se:

$log\left(\dfrac{e^x}{x-1}\right) = x$

$\Leftrightarrow\ log\,(e^x) - log\,(x-1) = x$ 3

$\Leftrightarrow\ x - log\,(x-1) = x$ 3

$\Leftrightarrow\ log\,(x-1) = 0$ 1

$\Leftrightarrow\ x - 1 = 1$ 2

$\Leftrightarrow\ x = 2$ 1

2.º Processo

Para $x > 1$, tem-se:

$log\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x$

$\Leftrightarrow \; \frac{e^x}{x-1} = e^x$ 5

$\Leftrightarrow \; x - 1 = 1$ 4

$\Leftrightarrow \; x = 2$ 1

Nota:
Se, qualquer que seja o processo utilizado, o examinando não referir que as equivalências são válidas apenas para $x > 1$, ou não verificar que 2 é, efectivamente, solução da equação, deverá ser penalizado em 2 pontos.

3.3. .... **15**

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ e/ou $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ **(ver nota 1)** 3

Concluir que a recta de equação $x = 1$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 2)** 3

Concluir que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 2

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 3)** 3

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$ 2

Notas:

1. O examinando só tem de indicar o valor de um dos limites; no entanto, se determinar ambos os limites e se enganar num deles, deverá ser cotado em 2 dos 3 pontos.

2. O examinando pode determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, em vez de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, e, verificando que o limite é $+\infty$, concluir, correctamente, que não existe assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

3. O examinando pode:

- começar por determinar $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- concluir que $m = 0$
- determinar, em seguida, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m\,x] = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Se o examinando optar por este processo, os 3 pontos previstos para o cálculo de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ devem ser distribuídos de acordo com o seguinte critério:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 2

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 1

4.1. .... **15**

Determinar a expressão analítica de g^{-1} 8

$y = \frac{\pi}{2} - arcsen(x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow arcsen(x+2) = \frac{\pi}{2} - y$ 1

$\Leftrightarrow x + 2 = sen\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ 5

$\Leftrightarrow x = -2 + sen\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ 1

Conclusão: $g^{-1}(x) = -2 + sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 1

Determinar o domínio de g^{-1} 7

$-\frac{\pi}{2} \leq arcsen(x+2) \leq \frac{\pi}{2}$ 2

$-\frac{\pi}{2} \leq -arcsen(x+2) \leq \frac{\pi}{2}$ 2

$0 \leq \frac{\pi}{2} - arcsen(x+2) \leq \pi$ 2

Conclusão: domínio de $g^{-1} = [0, \pi]$ 1

ou

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$ 2

$-\pi \leq -x \leq 0$ 2

$0 \leq x \leq \pi$ 2

Conclusão: domínio de $g^{-1} = [0, \pi]$ 1

4.2. .... **15**

$$\lim_{x \to -1} \frac{g(x)}{e^{x+1}-1} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{\pi}{2} - arcsen\,(x+2)}{e^{x+1}-1}$$ 1

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}}{e^{x+1}}$$ 8

Ter a ideia de aplicar a Regra de Cauchy 2
Derivar o numerador 4
Derivar o denominador 2

$$\lim_{x \to -1} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}}{e^{x+1}} = -\infty$$ 6

Concluir que o numerador tende para $-\infty$ 3
Concluir que o denominador tende para 1 1
Concluir que a fracção tende para $-\infty$ 2

A.1.1. .... **10**

Construir uma tabela da operação $\times$ definida em A 5

Justificar que $(A, \times)$ é um grupóide 5

Nota:
Uma resposta do tipo «*O produto de dois elementos de* A *é um elemento de* A» é aceite como totalmente correcta, mesmo que o examinando não tenha construído a tabela.

A.1.2. .... **15**

Referir que a multiplicação é associativa 5

Referir que a multiplicação é comutativa 5

Referir que o elemento neutro da multiplicação (1) pertence a A 5

A.2. .... **15**

Justificar que h é bijectiva **(ver nota)** 6

Verificar que $h(a \times b) = h(a) * h(b)\,,\ \forall\, a, b \in A$ 9

Nota:
O examinando pode mostrar a bijectividade de h por dois processos:
- através da construção de uma tabela da função h, constatando, então, o facto, óbvio, de h ser bijectiva;
- mostrando formalmente que h é uma função injectiva e sobrejectiva.

B.1. .... **15**

$4\,(x+1)^2 + 9\,(y-2)^2 = 36 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 5

$c^2 = 9 - 4$ 5

$c = \sqrt{5}$ 2

Distância focal $= 2\sqrt{5}$ 3

B.2. .... **10**

Referir que o centro da elipse é o ponto de coordenadas $(-1, 2)$ 4

Indicar as coordenadas dos focos da elipse 6

B.3. .... **15**

Substituir y por 0 numa equação da elipse 6

Obter a abcissa (-1) do ponto pedido 9