EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.°, 2.° e 5.° cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \frac{3+i}{1-i} + i^{35} \ , \quad z_2 = 8\, cis\frac{3\pi}{2} \quad \text{e} \quad z_3 = a + 2i \ , \ \text{com } a \in \mathbb{R}$$

(i é a unidade imaginária)

1.1. Determine z_1 na forma algébrica.

1.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = z_2$, apresentando as soluções na forma trigonométrica.

1.3. Determine o valor de a para o qual se tem $(z_3)^2 = 5 - 12i$

2.

2.1. Considere o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x-3}{x} \right| > 2 \right\}$

2.1.1. Verifique que $A =]-3, 1[\setminus \{0\}$

2.1.2. Seja $B = A \cup \{-3, 0\}$. Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto B.

2.2. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2} \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

2.2.1. Usando o método de indução matemática, mostre que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \ u_n > 1$

2.2.2. Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.

2.2.3. Justifique que (u_n) é uma sucessão convergente e determine o seu limite.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - \cos x$

3.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem pelo menos um zero, no intervalo $]0, \pi[$.

3.2. Seja f' a função derivada de f. Mostre que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f cuja existência é garantida pela alínea anterior é o único zero desta função.

3.3. A recta de equação $y = 2x - \frac{1}{2}$ intersecta o gráfico de f em infinitos pontos. A abcissa de um desses pontos pertence ao intervalo $[3\pi, 4\pi]$. Determine-a.

4. Considere a função $g :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log(1 - e^x)$ ($\log$ designa logaritmo de base e).

4.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{\log(x^2)}$

4.2. Determine uma equação de cada uma das assimptotas do gráfico da função g.

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere os grupóides comutativos $(\mathbb{R}, \theta)$ e $(\mathbb{R}^+, \phi)$, sendo as operações θ e ϕ definidas por

$$x \, \theta \, y = x + y + 4, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad x \, \phi \, y = \frac{1}{2} \, x y \, , \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

A.1. Determine $2 \, \phi \, (-1 \, \theta \, 3)$

A.2. Verifique que $(\mathbb{R}^+, \phi)$ é um semigrupo.

A.3. Considere a função bijectiva $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = 2 \, . \, 3^{x+4}$
Mostre que h é um isomorfismo de $(\mathbb{R}, \theta)$ sobre $(\mathbb{R}^+, \phi)$.

B. Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole que tem por vértices os pontos de coordenadas $(1, 1)$ e $(7, 1)$ e cuja distância focal é igual a 10.

B.1. Indique as coordenadas do centro de simetria de $\mathcal{H}$.

B.2. Determine o comprimento do eixo não transverso de $\mathcal{H}$.

B.3. Sejam F_1 e F_2 os focos de $\mathcal{H}$ e seja P um dos pontos de $\mathcal{H}$.
Qual é o valor de $(\overline{PF_1} - \overline{PF_2})^2$?

FIM

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	10	
	1.2.	15	
	1.3.	15	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1.	14	
	2.1.2.	6	
	2.2.	30	
	2.2.1.	10	
	2.2.2.	10	
	2.2.3.	10	
3.			**40**
	3.1.	12	
	3.2.	13	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A			**40**
	A.1.	10	
	A.2.	15	
	A.3.	15	
	ou		
B			**40**
	B.1.	10	
	B.2.	15	
	B.3.	15	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40**
1.1.		10	
1.2.		15	
1.3.		15	
2.			**50**
2.1.		20	
2.1.1.	14		
2.1.2.	6		
2.2.		30	
2.2.1.	10		
2.2.2.	10		
2.2.3.	10		
3.			**40**
3.1.		12	
3.2.		13	
3.3.		15	
4.			**30**
4.1.		15	
4.2.		15	
A			**40**
A.1.		10	
A.2.		15	
A.3.		15	
ou			
B			**40**
B.1.		10	
B.2.		15	
B.3.		15	
Total			**200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\frac{3+i}{1-i} + i^{35} =$

$= \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + i^{35} =$ 1

$= \frac{2+4i}{2} + i^{35} =$ .... 4 (2+2)

$= 1 + 2i - i$ .... 4 (1+3)

$= 1 + i$ 1

2.º Processo

$\frac{3+i}{1-i} + i^{35} =$

$= \frac{3+i}{1-i} - i =$ 3

$= \frac{3+i-i-1}{1-i} =$ 1

$= \frac{2}{1-i}$ 1

$= \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ 1

$= \frac{2(1+i)}{2}$ 2

$= 1 + i$ 2

1.2. 15

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$z^3 = z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3 = 8\ cis\ \frac{3\pi}{2}$ 1

$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\ cis\ \dfrac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\ ,\ k = 0, 1, 2$ 5

$\Leftrightarrow z = 2\ cis\ \frac{\pi}{2}\ \vee\ z = 2\ cis\ \frac{7\pi}{6}\ \vee\ z = 2\ cis\ \frac{11\pi}{6}$ .... 9 (3 × 3)

2.º Processo

$z^3 = z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\rho\, cis\, \theta)^3 = 8\ cis\ \frac{3\pi}{2}$ 2

$\Leftrightarrow \rho^3\, cis\,(3\theta) = 8\ cis\ \frac{3\pi}{2}$ 2

$\Leftrightarrow \rho^3 = 8\ \wedge\ 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 3

$\Leftrightarrow \rho = 2\ \wedge\ \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$ 2

$z = 2\ cis\ \frac{\pi}{2}\ \vee\ z = 2\ cis\ \frac{7\pi}{6}\ \vee\ z = 2\ cis\ \frac{11\pi}{6}$ .... 6 (3 × 2)

1.3. 15

$(z_3)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + 2i)^2 = 5 - 12i$ 1

$\Leftrightarrow a^2 + 4ai + 4i^2 = 5 - 12i$ 2

$\Leftrightarrow a^2 + 4ai - 4 = 5 - 12i$ 2

$\Leftrightarrow a^2 - 4 = 5\ \wedge\ 4a = -12$ 6

$\Leftrightarrow a = -3$ 4

2.1.1. .... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\left| \frac{x-3}{x} \right| > 2$

$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x} < -2 \quad \vee \quad \frac{x-3}{x} > 2$ 4

$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{x} < 0 \quad \vee \quad \frac{-x-3}{x} > 0$ 2

$\Leftrightarrow x \in]\,0, 1\,[\quad \vee \quad x \in]-3, 0\,[$ .... 6 (3+3)

Conclusão 2

2.º Processo

$\left| \frac{x-3}{x} \right| > 2$

$\Leftrightarrow \frac{|x-3|}{|x|} > 2$ 2

$\Leftrightarrow |x-3| > 2|x| \;\wedge\; x \neq 0$ .... 4 (2+2)

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 > 4x^2 \;\wedge\; x \neq 0$ 3

$\Leftrightarrow x \in]-3, 1\,[\quad \wedge \; x \neq 0$ 3

Conclusão 2

2.1.2. .... **6**

$B = [-3, 1\,[$ **(ver nota)**.. 2
Supremo de B.. 1
Não existência de máximo de B.. 1
Ínfimo de B.. 1
Mínimo de B.. 1

Nota:
Se o examinando indicar outro conjunto para B, deve cotar-se na totalidade a restante resolução, desde que o grau de dificuldade não tenha sido alterado.

2.2.1. .... **10**

Referir que a condição se verifica para $n = 1$ 2

Hereditariedade 8

Hipótese 1
Tese 1
Demonstração 6

2.2.2. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo (por indução)

Mostrar que a condição $u_{n+1} < u_n$ se verifica para $n = 1$ 3

Hereditariedade 7

Hipótese 1
Tese 1
Demonstração 5

2.º Processo

$u_{n+1} - u_n =$

$= \dfrac{1+u_n}{2} - u_n$ 2

$= \dfrac{1-u_n}{2}$ 2

Justificar que $\dfrac{1-u_n}{2} < 0 \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ 4

Conclusão 2

2.2.3. .... **10**

Justificar que (u_n) é limitada (minorada) 3

Concluir que (u_n) é convergente, por ser monótona e limitada (decrescente e minorada) 3

$\lim u_n = 1$ 4

Estabelecer a equação $\dfrac{1+x}{2} = x$ 3

Conclusão 1

3.1. .... **12**

Justificar a continuidade de f em $[0, \pi]$ 2

Calcular $f(0)$ 2

Calcular $f(\pi)$ 2

Conclusão (como f é contínua em $[0, \pi]$ e como $f(0)$ e $f(\pi)$ têm sinais contrários, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe pelo menos um zero da função no intervalo $]0, \pi[$)................................. 6

3.2. .... **13**

$f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ 3

Justificar que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 4

$2 + \operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x > -2$ 2

Justificar que $\operatorname{sen} x > -2, \forall x \in \mathbb{R}$ 2

ou

Referir que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ 2

$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq f'(x) \leq 3$ 2

ou

Justificar que f' não tem zeros.. 2

Justificar que f' não muda de sinal 1

Concluir que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 1

Justificar que f não pode ter mais do que um zero 6

Concluir que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ 3

Referir que uma função estritamente crescente não pode ter mais do que um zero 3

ou

Referir que: se a função f tivesse mais do que um zero, poder-se-ia concluir, pelo Teorema de Rolle, que a função derivada f' teria pelo menos um zero, o que não acontece 6

3.3. .... **15**

Escrever a equação $2x - \cos x = 2x - \frac{1}{2}$ 6

$2x - \cos x = 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ 1

$x = \frac{11\pi}{3}$ **(ver nota)** 8

Nota:
Se o examinando começar por escrever a expressão geral das soluções, em $\mathbb{R}$, da equação $\cos x = 1/2$, os 8 pontos previstos para este passo devem ser distribuídos da seguinte forma:

Expressão geral das soluções 4
Abcissa pedida 4

4.1. .... **15**

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{log(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{log(1-e^x)}{log(x^2)}$$ 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{log(1-e^x)}{log(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-e^x}{1-e^x}}{\frac{2}{x}}$$ 5

Ter a ideia de aplicar a Regra de Cauchy 1
Derivar correctamente o numerador 2
Derivar correctamente o denominador 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-e^x}{1-e^x}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\,e^x}{2(1-e^x)}$$ 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\,e^x}{2(1-e^x)} = \frac{1}{2}$$ 7

Ter a ideia de aplicar a Regra de Cauchy 1
Derivar correctamente o numerador 2
Derivar correctamente o denominador 2
Obter o valor do limite 2

ou

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\,e^x}{2(1-e^x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{2} \times \frac{x}{e^x-1} \right)$$ 4

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{2} \times \frac{x}{e^x-1} \right) = \frac{1}{2}$$ 3

4.2. .... **15**

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ 4

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é uma assimptota do gráfico de g 3

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ 4

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é uma assimptota do gráfico de g 3

Justificar a inexistência de outras assimptotas 1

A.1. .... **10**

$2 \,\phi\, (-1 \,\theta\, 3) =$

$= 2 \,\phi\, (-1 + 3 + 4)$ 4

$= 2 \,\phi\, 6$ 1

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 6$ 4

$= 6$ 1

A.2. .... **15**

Verificar a associatividade 14

$(a \,\phi\, b) \phi\, c =$

$= \left(\frac{1}{2}\, a\, b\right) \phi\, c$ 3

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\, a\, b\right) c$ 3

$= \frac{1}{4}\, a\, b\, c$ 1

$a \,\phi\, (b \,\phi\, c) =$

$= a \,\phi \left(\frac{1}{2}\, b\, c\right)$ 3

$= \frac{1}{2}\, a \left(\frac{1}{2}\, b\, c\right)$ 3

$= \frac{1}{4}\, a\, b\, c$ 1

Concluir que $(\mathbb{R}^+, \phi)$ é um semigrupo 1

A.3. .... **15**

Mostrar que $h(a\,\theta\,b) = h(a)\,\phi\,h(b)\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ 14

$h(a\,\theta\,b) =$

$= h\,(a + b + 4)$ 2

$= 2 \times 3^{a+b+8}$ 3

$h(a)\,\phi\,h(b) =$

$= \left(2 \times 3^{a+4}\right)\phi\left(2 \times 3^{b+4}\right)$ 3

$= \frac{1}{2}\left(2 \times 3^{a+4}\right) \times \left(2 \times 3^{b+4}\right)$ 3

$= 2 \times 3^{a+b+8}$ 3

Conclusão 1

B.1. .... **10**

Centro de simetria: $\left(\frac{1+7}{2}\,,\ \frac{1+1}{2}\right)$ 9

Conclusão 1

B.2. .... **15**

$2c = 10$ 3

$c = 5$ 1

$a = 3$ 3

$c^2 = a^2 + b^2$ 3

$b = 4$ 3

Conclusão 2

B.3. .... **15**

$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 6$ 10

$(\overline{PF_1} - \overline{PF_2})^2 = 36$ 5