EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino

(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos | **1.ª FASE**
2001 | **1.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$w = \frac{1}{(2-2i)^2} + \frac{7}{8}i \qquad (i \text{ é a unidade imaginária})$$

1.1. Verifique que $w = cis\frac{\pi}{2}$

1.2. Resolva a equação $z^2 = w$

Apresente as soluções na forma algébrica.

1.3. Determine o menor número natural n para o qual w^n é um número real positivo.

2.

2.1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| = 3x - 3\}$ e $B = \{-4\} \cup [1, 2]$

2.1.1. Verifique que $A \subset B$

2.1.2. Indique o interior e o derivado do conjunto B.

2.2. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3^n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2.2.1. Justifique que (u_n) é uma sucessão crescente.

2.2.2. Sabendo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$, justifique que a sucessão (u_n) é convergente.

2.2.3. Justifique que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

V.S.F.F.

3. Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real.

Seja $f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ a função derivada de f, definida por $f'(x) = x\,(log\, x - 1)$

(log designa logaritmo de base e)

3.1. Verifique que $f''(x) = log\, x$

3.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3.3. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

4. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = sen^2\, x$

4.1. Prove, por indução matemática, que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(x) = 2^{n-1}\, sen\big((n-1)\tfrac{\pi}{2} + 2x\big)$$

($g^{(n)}$ designa a derivada de ordem n da função g)

4.2. Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{e^{5x} - 5x - 1}$

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere o grupóide comutativo $(\mathbb{R}, *)$, sendo a operação $*$ definida por

$a{*}b = ab - a - b + 2, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

A.1. Justifique que $(\mathbb{R}, *)$ é um semigrupo.

A.2. Considere o grupo comutativo $(\mathbb{R}, \theta)$, sendo a operação θ definida por

$a\,\theta\, b = a + b - 1, \ \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$

A.2.1. Mostre que $(\mathbb{R}, \theta, *)$ é um anel.

A.2.2. Justifique que não existe nenhum isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ sobre $(\mathbb{R}, \theta)$.

B. Sejam $F_1(-1,3)$ e $F_2(9,3)$ os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ e de uma hipérbole $\mathcal{H}$.

B.1. Justifique que o ponto de coordenadas $(4,3)$ é o centro de simetria da elipse $\mathcal{E}$.

B.2. Determine uma condição que defina a elipse $\mathcal{E}$, sabendo que a sua excentricidade é igual a $\frac{5}{6}$

B.3. Sabendo que o ponto $P(0,3)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$, determine o comprimento do seu eixo transverso.

FIM

COTAÇÕES

1. .... **40 pontos**
- **1.1.** 10
- **1.2.** 15
- **1.3.** 15

2. .... **50 pontos**
- **2.1.** 20
  - **2.1.1** 14
  - **2.1.2** 6
- **2.2.** 30
  - **2.2.1** 10
  - **2.2.2** 10
  - **2.2.3** 10

3. .... **40 pontos**
- **3.1.** 10
- **3.2.** 15
- **3.3.** 15

4. .... **30 pontos**
- **4.1.** 15
- **4.2.** 15

A. .... **40 pontos**
- **A.1.** 13
- **A.2.** 27
  - **A.2.1** 17
  - **A.2.2** 10

ou

B. .... **40 pontos**
- **B.1.** 12
- **B.2.** 18
- **B.3.** 10

Total .... **200 pontos**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino

(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40 pontos**
	1.1.	10	
	1.2.	15	
	1.3.	15	
2.			**50 pontos**
	2.1.	20	
	2.1.1	14	
	2.1.2	6	
	2.2.	30	
	2.2.1	10	
	2.2.2	10	
	2.2.3	10	
3.			**40 pontos**
	3.1.	10	
	3.2.	15	
	3.3.	15	
4.			**30 pontos**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40 pontos**
	A.1.	13	
	A.2.	27	
	A.2.1	17	
	A.2.2	10	
	ou		
B.			**40 pontos**
	B.1.	12	
	B.2.	18	
	B.3.	10	
Total			**200 pontos**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de 10% da cotação prevista.

Critérios específicos

1.1. 10

$w = \frac{1}{(2-2i)^2} + \frac{7}{8}i$

$= \frac{1}{-8i} + \frac{7}{8}i$ 3

$= \frac{1}{8}i + \frac{7}{8}i$ 4

$= i$ 1

$= cis\frac{\pi}{2}$ 2

1.2. 15

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

$z^2 = cis\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+yi)^2 = i$ 2

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = i$ 1

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \ \wedge \ 2xy = 1$ 4

$\Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \ \vee \ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 2

2.º processo

$z^2 = cis\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = cis\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}, \ k = 0, 1$ 9

$\Leftrightarrow z = cis\frac{\pi}{4} \vee z = cis\frac{5\pi}{4}$ 2

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \ \vee \ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 4

3.º processo

$z = \rho \, cis \, \theta$ 1

$z^2 = \rho^2 \, cis \, 2\theta$ 2

$\rho^2 \, cis \, 2\theta = cis \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2 = 1 \wedge 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$ 4

$\Leftrightarrow \rho = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \; k = 0, 1$ 2

$\Leftrightarrow z = cis \frac{\pi}{4} \vee z = cis \frac{5\pi}{4}$ 2

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \;\vee\; z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ 4

1.3. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º processo

$n = 4$ pois $i^4 = 1$ e, para $n = 1, 2, 3, \; i^n \notin \mathbb{R}^+$ 15

2.º processo

$w^n = cis \frac{n\pi}{2}$ 2

$cis \frac{n\pi}{2} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$ 6

$\Leftrightarrow n = 4k, \; k \in \mathbb{Z}$ 2

Concluir que a solução pedida é 4 5

2.1.1 .... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º processo

Referir que $3x - 3 \geq 0$ 3

Referir que, para $3x - 3 \geq 0$, a condição $|x^2 - 1| = 3x - 3$
é equivalente à condição $x^2 - 1 = 3x - 3$ (uma vez que
$3x - 3 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 \geq 0$) 6

Concluir que $A = \{1, 2\}$ 3

Concluir que $A \subset B$ 2

2.º processo

$|x^2 - 1| = 3x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1 = 3x - 3 \vee x^2 - 1 = 3 - 3x) \wedge 3x - 3 \geq 0$ (Ver **nota 1**)...... 6

$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 2 \vee x = \ -4 \vee x = 1) \wedge x \geq 1$........................3

$A = \{1, 2\}$ (Ver **nota 2**)...3

Concluir que $A \subset B$..2

Nota 1
Se o examinando não indicar a condição $3x - 3 \geq 0$ deverá ser penalizado em 3 pontos. Pode, porém, indicar essa condição noutro passo da sua resolução, não sendo, nesse caso, penalizado.

Nota 2
Se o examinando considerar -4 para solução da equação, será penalizado em 2 pontos.

2.1.2....**6**

Interior do conjunto B.. 2
Derivado do conjunto B.. 4

2.2.1...**10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$..5

Como $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (u_n) é crescente 5

2.º Processo
Cada termo da sucessão (u_n) obtém-se adicionando ao termo anterior uma quantidade positiva, logo a sucessão (u_n) é crescente..10

2.2.2...**10**

Justificar que (u_n) é limitada.. 5
Concluir que, sendo (u_n) monótona e limitada, (u_n) é convergente.... 5

2.2.3. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Referir que $\lim u_n$ é um número real diferente de zero 2

Referir que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$ 4

Concluir que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 4

2.º Processo

Referir que $\lim u_n$ é um número real diferente de zero 2

Referir que $\lim \frac{2}{3^n} = 0$ 4

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{u_n + \frac{2}{3^n}}{u_n} = 1$ 4

3.1. .... **10**

$f''(x) = 1(log\, x - 1) + \frac{1}{x}\, x$ 6

$= log\, x$ 4

3.2. .... **15**

Determinar o zero de f'' 3

Estudar o sinal de f'' 4

Indicar o intervalo onde a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo e o intervalo onde está voltada para cima 4

Referir que f tem um ponto de inflexão para $x = 1$ 4

3.3. .... **15**

Determinar o zero de f' 3

Estudar o sinal de f' 4

Indicar os intervalos de monotonia de f 4

Referir que f tem um mínimo relativo para $x = e$ 4

4.1. .... **15**

Provar que a condição é válida para $n = 1$ 4

Indicar a hipótese e a tese de indução .... 2 (1+1)

$$g^{(n+1)}(x) = \left(2^{n-1}\, sen\left((n-1)\,\frac{\pi}{2} + 2\,x\right)\right)' \text{ .... } 2$$

$$= 2^{n-1}.2\ cos\left((n-1)\,\frac{\pi}{2} + 2\,x\right) \text{ .... } 2$$

$$= 2^{n}\, cos\left(n\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2\,x\right) \text{ .... } 2$$

$$= 2^{n}\, sen\left(n\,\frac{\pi}{2} + 2\,x\right) \text{ .... } 2$$

Conclusão 1

4.2. .... **15**

Aplicar a regra de Cauchy 6

Aplicar novamente a regra de Cauchy (Ver **nota**) 6

Concluir que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{e^{5x} - 5x - 1} = \frac{2}{25}$ 3

Nota:

O examinando pode, em alternativa, utilizar o conhecimento de que $\lim\limits_{y \to 0} \frac{sen\, y}{y} = 1$ e $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^{z} - 1}{z} = 1$

A.1. .... **13**

$$(a*b)*c = (ab - a - b + 2)*c \text{ .... } 2$$

$$= (ab - a - b + 2)c - (ab - a - b + 2) - c + 2 \text{ .... } 2$$

$$= abc - ac - bc - ab + a + b + c \text{ .... } 2$$

$$a*(b*c) = a*(bc - b - c + 2) \text{ .... } 2$$

$$= a(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2 \text{ .... } 2$$

$$= abc - ab - ac + a - bc + b + c \text{ .... } 2$$

Conclusão 1

A.2.1. .... **17**

$a{*}(b\theta c) = a{*}(b+c-1)$ 1
$= a(b+c-1) - a - (b+c-1) + 2$ 2
$= ab + ac - 2a - b - c + 3$ 2

$(a{*}b)\theta(a{*}c) = (ab - a - b + 2)\theta(ac - a - c + 2)$ 2
$= ab - a - b + 2 + ac - a - c + 2 - 1$ 2
$= ab + ac - 2a - b - c + 3$ 1

Mostrar que $(b\theta c){*}a = (b{*}a)\theta(c{*}a)$ ou evocar
a comutatividade da operação $*$ 4

Concluir que $(\mathbb{R}, \theta, *)$ é um anel 3

A.2.2. .... **10**

Referir que $(\mathbb{R}, \theta)$ é grupo e justificar que $(\mathbb{R}, *)$ não é grupo .... 7 (2+5)
Conclusão 3

B.1. .... **12**

B.2. .... **18**

$c = 5$ 4
$a = 6$ 5
$a^2 = 36$ 1
$b^2 = 11$ 4
Escrever a condição da elipse $\mathcal{E}$ 4

B.3. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$P(0,3)$ é um dos vértices de $\mathcal{H}$ 4

$Q(8,3)$ é o outro vértice de $\mathcal{H}$ 2

Eixo transverso $= \overline{PQ} = 8$ 4

2.º Processo

$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| =$ eixo transverso 6

$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 8$ 4