EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos | **1.ª FASE**
2001 | **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$w = \frac{1 + 2i + 3i^2}{1 - i} \qquad (\, i \text{ é a unidade imaginária})$$

1.1. Verifique que $w = 2\, cis\, \pi$

1.2. Determine $w \,.\, (1 + i)^4$ na forma trigonométrica.

1.3. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 = -8\, w$
Apresente as soluções na forma algébrica.

2.

2.1. Considere os conjuntos

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : |x| > x^2 \}, \quad B = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[\quad \text{e} \quad C = A \cap B$$

2.1.1. Verifique que $C = \left[-\frac{1}{2}, 1 \right[\setminus \{0\}$

2.1.2. Indique a fronteira e a aderência do conjunto C.

2.2. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas, respectivamente, por

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{n! + 3}{2^n}$$

2.2.1. Mostre que $a_{n+1} \leq a_n \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$

2.2.2. Justifique que (a_n) é uma sucessão convergente.

2.2.3. Determine $\lim (a_n \,.\, b_n)^{n!}$

V.S.F.F.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - x$

3.1. Calcule a inclinação da recta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa $log\, 2$ (log designa logaritmo de base e).

3.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

3.3. Mostre que o gráfico de f tem uma única assimptota e escreva uma equação dessa assimptota.

4. Considere a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x + sen\, x$

4.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{log\,(1+x)}$

4.2. Mostre que 0 é o único zero da função g

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. De um corpo $(\mathbb{R}, \theta, \phi)$, sabe-se que:

- 2 é o zero do corpo
- $a \phi b = ab - 2a - 2b + 6$

A.1. Indique, justificando, o valor de $2\, \theta\, 5$

A.2. Determine o elemento unidade do corpo.

A.3. Considere agora a operação $*$ definida por $x * y = (x\, \theta\, y) + (x\, \phi\, y)$

Sabendo que 1 e 3 são elementos simétricos, no corpo $(\mathbb{R}, \theta, \phi)$, determine o valor de $1 * 3$

B. Considere a hipérbole H e a parábola P, definidas, respectivamente, por:

$$(y+1)^2 - (x-3)^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad (y+1)^2 = x - 2$$

B.1. Mostre que as coordenadas dos vértices de H são $(3, 0)$ e $(3, -2)$.

B.2. Verifique se o foco da parábola P pertence ao eixo transverso da hipérbole H.

B.3. Determine as coordenadas dos pontos de intersecção das duas cónicas.

FIM

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	10	
	1.2.	15	
	1.3.	15	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1.	14	
	2.1.2.	6	
	2.2.	30	
	2.2.1.	10	
	2.2.2.	10	
	2.2.3.	10	
3.			**40**
	3.1.	10	
	3.2.	15	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40**
	A.1.	10	
	A.2.	15	
	A.3.	15	
ou			
B.			**40**
	B.1.	10	
	B.2.	15	
	B.3.	15	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	10	
	1.2.	15	
	1.3.	15	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1.	14	
	2.1.2.	6	
	2.2.	30	
	2.2.1.	10	
	2.2.2.	10	
	2.2.3.	10	
3.			**40**
	3.1.	10	
	3.2.	15	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40**
	A.1.	10	
	A.2.	15	
	A.3.	15	
ou			
B.			**40**
	B.1.	10	
	B.2.	15	
	B.3.	15	
Total			**200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

$\dfrac{1+2i+3i^2}{1-i} =$

$= \dfrac{-2+2i}{1-i} =$ 3

$= \dfrac{-2(1-i)}{1-i} =$ 5

$= -2$ 1

$= 2\,cis\,\pi$ 1

2.º Processo

$\dfrac{1+2i+3i^2}{1-i} =$

$= \dfrac{-2+2i}{1-i} =$ 3

$= \dfrac{(-2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$ 1

$= \dfrac{-4}{2} =$ .... 4 (2+2)

$= -2$ 1

$= 2\,cis\,\pi$ 1

3.º Processo

$\frac{1+2i+3i^2}{1-i} =$

$= \frac{-2+2i}{1-i} =$ 3

$= \frac{\sqrt{8}\ cis\left(\frac{3}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}\ cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} =$ ....6 (3+3)

$= 2\,cis\,\pi$ 1

1.2. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$w\,.\,(1+i)^4 =$

$= (2\,cis\,\pi)\,.\,(1+i)^4 =$ 1

$= (2\,cis\,\pi)\,.\,(\sqrt{2}\ cis\,\frac{\pi}{4})^4 =$ 6

$= (2\,cis\,\pi)\,.\,(4\,cis\,\pi) =$ 4

$= 8\,cis\,2\pi$ (ou $8\,cis\,0$) 4

2.º Processo

$w\,.\,(1+i)^4 =$

$= (2\,cis\,\pi)\,.\,(1+i)^4 =$ 1

$= (-2)\,.\,\left[(1+i)^2\right]^2 =$ ....5 (3+2)

$= (-2)\,.\,(2i)^2 =$ 3

$= (-2)\,.\,(-4) =$ 2

$= 8 =$ 1

$= 8\,cis\,2\pi$ (ou $8\,cis\,0$) 3

1.3. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$z^4 = -8\ w$

$\Leftrightarrow z^4 = 16\ cis\, 0$ (ou $z^4 = 16\ cis\, 2\pi$) 4

$\Leftrightarrow z = 2\ cis\ \frac{k\pi}{2}\ ,\ k = 0, 1, 2, 3$ (ou equivalente) 3

$\Leftrightarrow z = 2\ cis\ 0\ \vee\ z = 2\ cis \frac{\pi}{2}\ \vee\ z = 2\ cis\ \pi\ \vee\ z = 2\ cis \frac{3\pi}{2}$ 4

$\Leftrightarrow z = 2\ \vee\ z = 2i\ \vee\ z = -2\ \vee\ z = -2i$ 4

2.º Processo

$z^4 = -8\ w$

$\Leftrightarrow z^4 = 16$ 4

$\Leftrightarrow z^2 = 4\ \vee\ z^2 = -4$ .... 3 (1+2)

$\Leftrightarrow z = 2\ \vee\ z = -2\ \vee\ z = 2i\ \vee\ z = -2i$ .... 8 (1+1+3+3)

2.1.1. .... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$|x| > x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < -x^2\ \vee\ x > x^2$ 3

$\Leftrightarrow x + x^2 < 0\ \vee\ x - x^2 > 0$ .... 2 (1+1)

$A =]-1, 0[\ \cup\ ]0, 1[$ .... 8 (4+4)

$C = \left[-\frac{1}{2}, 1\right[\setminus \{0\}$ 1

2.º Processo

$|x| > x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 > x^4$ 2

$\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \ \wedge \ x \neq 0$ 6

$A =]-1, 0[\ \cup \ ]0, 1[$ 5

$C = \left[-\frac{1}{2}, 1\right[\setminus \{0\}$ 1

2.1.2. .... **6**

Fronteira de $C = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ 3

Aderência de $C = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 3

2.2.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

1.º Processo

$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^n}{n!}$ 2

$\Leftrightarrow \frac{2^n . 2}{(n+1). n!} \leq \frac{2^n}{n!}$ 2

$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1$ 2

$\Leftrightarrow n \geq 1$ 2

Conclusão 2

2.º Processo

$a_{n+1} - a_n =$

$= \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{2^n}{n!}$ 2

$= \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{(n+1)\,.\,2^n}{(n+1)!}$ 2

$= \dfrac{2^n\,(1-n)}{(n+1)!}$ 3

Conclusão 3

3.º Processo

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}$ 2

$= \dfrac{2}{n+1}$ 5

Conclusão 3

4.º Processo (utilizando o método de indução matemática)

$n = 1$ 2

Hereditariedade 8

Hipótese 1

Tese 1

Demonstração 6

Nota: o examinando pode escrever a hipótese e a tese na forma de implicação.

2.2.2. .... **10**

Evocar a alínea anterior para justificar que (a_n) é monótona.............................3

Justificar que (a_n) é limitada...5

Conclusão 2

Nota: o examinando pode também justificar que (a_n) é decrescente e minorada para concluir que (a_n) é convergente.

2.2.3. .... **10**

$\lim (a_n \,.\, b_n)^{n!} =$

$= \lim \left(\frac{2^n}{n!} \times \frac{n!+3}{2^n} \right)^{n!}$ 1

$= \lim \left(\frac{n!+3}{n!} \right)^{n!}$ 3

$= \lim \left(1 + \frac{3}{n!}\right)^{n!}$ 3

$= e^3$...3

3.1. .... **10**

$f'(x) = e^x - 1$...3

$f'(log\, 2) = 1$...3

Inclinação $= \pi/4$...4

3.2. .... **15**

Determinar o zero de f' (ver **nota**)...3

Estudar o sinal de f'...4

Indicar os intervalos de monotonia de f 4

Referir que f tem um mínimo para $x = 0$...4

Nota: se o examinando não tiver determinado, na alínea anterior, a expressão de f', os 3 pontos relativos à determinação do zero de f' devem ser subdivididos da seguinte forma:

$f'(x) = e^x - 1$...2

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 1

3.3. .... **15**

Justificar que o gráfico de f não tem assimptotas verticais.................................2

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ 3

Referir que o gráfico de f não tem assimptotas não verticais
quando $x \to +\infty$ 2

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ 3

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = 0$ 3

Conclusão 2

4.1. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{log\,(1+x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,x + sen\,x}{log\,(1+x)}$ 1

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + \frac{sen\,x}{x}}{\frac{log\,(1+x)}{x}}$ 6

$= 3$ 8

2.º Processo

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{log\,(1+x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,x + sen\,x}{log\,(1+x)}$ 1

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + cos\,x}{\frac{1}{1+x}}$ 11

$= 3$ 3

4.2. .... **15**

$g(0) = 0$ 4

Justificar que o zero é único 11

$g'(x) = 2 + cos\, x$ 2

Referir que g' não tem zeros 3

Conclusão (pelo Teorema de Rolle) 6

ou

$g'(x) = 2 + cos\, x$ 2

Referir que $g'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 3

Conclusão (pela monotonia de g) 6

A.1. .... **10**

$2\,\theta\,5 = 5$ 4

Justificar esta igualdade 6

A.2. .... **15**

Escrever $a\,\phi\,u = a$ 3

$a\,\phi\,u = a \;\Leftrightarrow\; a\,u - 2\,a - 2\,u + 6 = a$ 2

$u = 3$ 10

A.3. .... **15**

$1 * 3 =$

$= (1\,\theta\,3) + (1\,\phi\,3)$ 2

$= 2 + 1 =$ .... 12 (6+6)

$= 3$ 1

B.1. .... **10**

Centro de simetria de $\mathrm{H} = (3, -1)$ 4

Semieixo transverso $= 1$ 4

Vértices de H 2

B.2. .... **15**

Vértice de $\mathrm{P} = (2, -1)$ 3

Parâmetro de $\mathrm{P} = 1/2$ 3

Foco de $\mathrm{P} = (9/4, -1)$ 4

Concluir que o foco de P não pertence ao eixo transverso de H 5

B.3. .... **15**

Escrever $(y+1)^2 - (x-3)^2 = 1 \;\wedge\; (y+1)^2 = x - 2$ 3

Concluir que $x = 3 \;\vee\; x = 4$ 8

Coordenadas pedidas 4