EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$w = 2 + i$ (i é a unidade imaginária)

1.1. Determine $(w-2)^{11}(1+3i)^2$ na forma algébrica.

1.2. Averigúe se o inverso de w é, ou não, $\sqrt{2}\, cis\, \frac{3\pi}{4}$

1.3. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = \left(\sqrt{2}\, cis\, \frac{3\pi}{4}\right)^6$

Apresente as soluções na forma algébrica.

2.

2.1. Considere os conjuntos

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| 2x - \frac{1}{x} \right| \leq 1 \right\}$, $B = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$ e $C = A \cap B$

2.1.1. Verifique que $C = \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

2.1.2. Indique o exterior e o derivado do conjunto C.

2.2. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-3}{3^k}$

2.2.1. Verifique que (a_n) é uma sucessão monótona.

2.2.2. Utilizando o método de indução matemática, prove que

$$a_n = -\frac{n}{3^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2.3. Justifique que (a_n) é uma sucessão limitada.

3. Considere a função $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$

3.1. Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

3.2. Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

3.3. Determine as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com a recta de equação $y = -1$

4.

4.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{log\,(1 + x^2)}{x - arctg\ x}$ (log designa logaritmo de base e)

4.2. De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que 1 é zero de g e que $g(3) > 0$
Prove que a equação $g(x) = \dfrac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere o grupóide $(\mathbb{R}^+, \times)$, em que $\times$ designa a multiplicação usual.

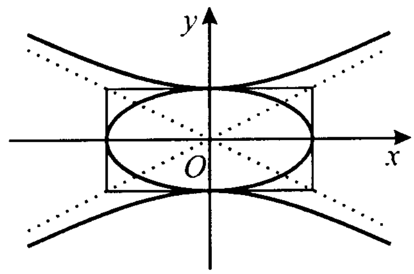
A.1. Justifique que $(\mathbb{R}^+, \times)$ é um grupo.

A.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ a função definida por $f(x) = e^{1-x}$. Sabendo que f é um isomorfismo de um grupóide $(\mathbb{R}, \theta)$ sobre $(\mathbb{R}^+, \times)$, determine:

A.2.1. O elemento neutro de $(\mathbb{R}, \theta)$

A.2.2. $f(-2\ \theta\ 3)$

B. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, uma elipse, inscrita num rectângulo, e parte de uma hipérbole.
As assimptotas da hipérbole, representadas a tracejado, contêm as diagonais do rectângulo.
Os vértices da hipérbole coincidem com dois dos vértices da elipse.



Uma equação da elipse é $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

B.1. Determine a excentricidade da elipse.

B.2. Determine a equação reduzida de cada uma das assimptotas da hipérbole.

B.3. Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da hipérbole com a recta de equação $x = 2$

FIM

COTAÇÕES

1.			40
1.1.		12	
1.2.		13	
1.3.		15	
2.			50
2.1.		20	
2.1.1.	16		
2.1.2.	4		
2.2.		30	
2.2.1.	10		
2.2.2.	10		
2.2.3.	10		
3.			40
3.1.		13	
3.2.		14	
3.3.		13	
4.			30
4.1.		15	
4.2.		15	
A.			40
A.1.		14	
A.2.		26	
A.2.1.	13		
A.2.2.	13		
ou			
B.			40
B.1.		14	
B.2.		12	
B.3.		14	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino

(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			40
1.1.		12	
1.2.		13	
1.3.		15	
2.			50
2.1.		20	
2.1.1.	16		
2.1.2.	4		
2.2.		30	
2.2.1.	10		
2.2.2.	10		
2.2.3.	10		
3.			40
3.1.		13	
3.2.		14	
3.3.		13	
4.			30
4.1.		15	
4.2.		15	
A.			40
A.1.		14	
A.2.		26	
A.2.1.	13		
A.2.2.	13		
ou			
B.			40
B.1.		14	
B.2.		12	
B.3.		14	
Total			200

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **12**

$(w-2)^{11}(1+3i)^2 =$

$= \ -i(-8+6i)$ .... 8 (4+4)

$= 6 + 8i$ 4

1.2. .... **13**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

1.º Processo

$\frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ 6

$\sqrt{2}\, cis\, \frac{3\pi}{4} = -1+i$ 5

Conclusão 2

2.º Processo

$\sqrt{2}\; cis\, \frac{3\pi}{4} = -1+i$ 5

$\frac{1}{-1+i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, i$ 6

Conclusão 2

3.º Processo

$\sqrt{2}\; cis\, \frac{3\pi}{4} = -1+i$ 5

$(-1+i)(2+i) = -3+i$ 6

Conclusão 2

4.º Processo

$|w| = \sqrt{5}$ 4

$\frac{1}{\sqrt{5}} \neq \sqrt{2}$ 7

Conclusão 2

1.3. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$z^3 = \left(\sqrt{2}\; cis\, \frac{3\pi}{4}\right)^6$

$\Leftrightarrow\; z^3 = \left(2\; cis\, \frac{3\pi}{2}\right)^3$ 3

$\Leftrightarrow\; z = 2\; cis\, \frac{3\pi}{2} \;\vee\; z = 2\; cis\, \frac{5\pi}{6} \;\vee\; z = 2\; cis\, \frac{\pi}{6}$ 6

$\Leftrightarrow\; z = -2i \;\vee\; z = -\sqrt{3}+i \;\vee\; z = \sqrt{3}+i$ 6

V.S.F.F.

2.º Processo

$z^3 = \left(\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}\right)^6$

$\Leftrightarrow\ z^3 = 8\ cis\ \frac{\pi}{2}$ 3

$\Leftrightarrow\ z = 2\ cis\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$ 3

$\Leftrightarrow\ z = 2\ cis\frac{\pi}{6}\ \vee\ z = 2\ cis\frac{5\pi}{6}\ \vee\ z = 2\ cis\ \frac{3\pi}{2}$ 3

$\Leftrightarrow\ z = \sqrt{3} + i\ \vee\ z = -\sqrt{3} + i\ \vee\ z = -2i$ 6

2.1.1. .... **16**

$\left|2x - \frac{1}{x}\right| \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2x - \frac{1}{x} \geq -1\ \wedge\ 2x - \frac{1}{x} \leq 1$ 2

$\Leftrightarrow\ \frac{2x^2 + x - 1}{x} \geq 0\ \wedge\ \frac{2x^2 - x - 1}{x} \leq 0$ .... 4 (2+2)

$A = \left(\left[-1, 0\right[\ \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left]0, 1\right]\right)$ .... 6 (3+3)

$A = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 3

Conclusão 1

2.1.2. .... **4**

Exterior de C 2

Derivado de C 2

2.2.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$a_{n+1} - a_n =$

$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-3}{3^k}$ 2

$= \frac{2n-1}{3^{n+1}}$ 5

Conclusão 3

2.º Processo

Referir que, na sucessão (a_n), cada termo, a partir do segundo, se obtém adicionando ao anterior um número positivo 8

Conclusão 2

2.2.2. .... **10**

$n = 1$ 2

Hereditariedade 8

Hipótese 1

Tese 1

Demonstração 6

Nota: o examinando pode escrever a hipótese e a tese na forma de implicação.

2.2.3. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Referir que $a_n \longrightarrow 0$ 5

Conclusão (toda a sucessão convergente é limitada) 5

2.º Processo

Referir que a_1 é um minorante do conjunto dos termos da sucessão.................. 4

Referir que 0 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão.................... 4

Conclusão 2

3.1. .... **13**

$\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = -\infty$ 4

Concluir que a recta de equação $x = -\pi$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty$ 4

Concluir que a recta de equação $x = \pi$ é assimptota vertical do gráfico de f 2

Justificar que o gráfico de f não tem outras assimptotas 1

3.2. .... **14**

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x\,(1+\cos x) + \operatorname{sen} x \cos x}{(1+\cos x)^2}$ 3

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 3

Estudar o sinal de f' (que pode ser apresentado através de um quadro) 5

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ 2

3.3. .... **13**

Escrever a equação $f(x) = -1$ 4

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$ 3

$x = \pm \dfrac{2\pi}{3}$ 6

4.1. .... **15**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{log\,(1+x^2)}{x - arctg\ x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2\,x}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} =$$ 6

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} =$$ 6

$$= +\infty$$ 3

4.2. .... **15**

Referir que $0 < \frac{g(3)}{2} < g(3)$ 7

Evocar o Teorema de Bolzano para concluir o pretendido 8

A.1. .... **14**

Referir a associatividade da multiplicação 4

Referir que 1 é o elemento neutro da multiplicação 4

Referir que o inverso de um número real positivo existe sempre
e é positivo 4

Conclusão 2

A.2.1. .... **13**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Escrever a equação $f(x) = 1$ 6

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ 5

Conclusão 2

V.S.F.F.

2.º Processo

$f^{-1}(x) = 1 - log(x)$ 6

$f^{-1}(1) = 1$ 5

Conclusão 2

A.2.2. .... **13**

$f(-2\ \theta\ 3) =$

$= f(-2) \times f(3) =$ 7

$= e^3 \times e^{-2} =$ 4

$= e$ 2

B.1. .... **14**

$a^2 = 4$ 3

$b^2 = 1$ 3

$c = \sqrt{3}$ 5

$e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 3

B.2. .... **12**

$y = \dfrac{1}{2}\,x$ 6

$y = -\dfrac{1}{2}\,x$ 6

B.3. .... **14**

Escrever uma equação da hipérbole (por exemplo $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$).......... 4

Escrever o sistema $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1 \ \wedge\ x = 2$ 2

Resolver o sistema 4

Conclusão : os pontos são $(2, \sqrt{2})$ e $(2, -\sqrt{2})$ 4