EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino

(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{i\,(1+i)} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{2+2i}{\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{12}}$$

(i designa a unidade imaginária).

1.1. Verifique que:

1.1.1. $z_1 = -2i$

1.1.2. $z_2 = 2\,cis\,\frac{\pi}{6}$

1.2. Mostre que z_1 e z_2 são raízes cúbicas do mesmo número complexo.

2.

2.1. Considere os conjuntos: $A = \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ : |x| > \sqrt{x}\right\}$ e

$$B = A \cup \mathbb{N}_0$$

2.1.1. Mostre que $B = \{0\} \cup [\,1, +\infty\,[$

2.1.2. Indique a aderência e o derivado do conjunto B.

2.2. Considere a sucessão (u_n), de termos positivos, definida por

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

2.2.1. Justifique que (u_n) é uma sucessão decrescente.

2.2.2. Mostre que (u_n) é uma sucessão convergente e determine o seu limite.

3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{2x}(2x+1)$

3.1. Verifique que $f'(x) = 4e^{2x}(x+1)$

3.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

3.3. Determine as coordenadas do ponto de intersecção dos gráficos das funções f e f'

4. Considere a função $g : \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right] \longrightarrow [0, \pi]$, definida por

$$g(x) = arc\,cos\,(5x)$$

Determine o valor de:

4.1. $g^{-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

4.2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}} \dfrac{\sqrt{1-25x^2}}{g(x)}$

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere o semigrupo comutativo $(\mathbb{R}, *)$, sendo a operação $*$ definida por:

$$a * b = a + b - 3ab\,, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

A.1. Sabendo que $\left(\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}, *\right)$ é um subgrupóide de $(\mathbb{R}, *)$, justifique que $\left(\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}, *\right)$ é um grupo.

A.2. Considere o grupo comutativo $(\mathbb{R}, \theta)$, sendo a operação θ definida por

$$a\,\theta\,b = a + b - \frac{1}{3}\,, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

A.2.1. Mostre que $(\mathbb{R}, \theta, *)$ é um corpo.

A.2.2. Justifique que $x * y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \vee y = \frac{1}{3} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

B. Considere a elipse E cujo eixo maior é 6 e que tem por focos os pontos $F_1(0,2)$ e $F_2(0,\,-2)$

B.1. Determine o eixo menor e a excentricidade da elipse E.

B.2. Prove que o ponto $A\left(\frac{5}{3},2\right)$ pertence à elipse E.

B.3. Seja P a parábola definida pela condição $x^2-8y=0$.
Justifique que o foco da parábola P é um dos focos da elipse E.

FIM

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	25	
	1.1.1.	15	
	1.1.2.	10	
	1.2.	15	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1	14	
	2.1.2	6	
	2.2.	30	
	2.2.1	10	
	2.2.2	20	
3.			**40**
	3.1.	10	
	3.2.	15	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40**
	A.1.	15	
	A.2.	25	
	A.2.1	15	
	A.2.2	10	
	ou		
B.			**40**
	B.1.	10	
	B.2.	15	
	B.3.	15	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40**
1.1.		25	
1.1.1.	15		
1.1.2.	10		
1.2.		15	
2.			**50**
2.1.		20	
2.1.1	14		
2.1.2	6		
2.2.		30	
2.2.1	10		
2.2.2	20		
3.			**40**
3.1.		10	
3.2.		15	
3.3.		15	
4.			**30**
4.1.		15	
4.2.		15	
A.			**40**
A.1.		15	
A.2.		25	
A.2.1	15		
A.2.2	10		
ou			
B.			**40**
B.1.		10	
B.2.		15	
B.3.		15	
Total			**200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de 2 pontos.

Critérios específicos

1.1.1. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

$\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{i(1+i)} =$

$= \frac{1+i+i+1}{i(1+i)}$ 5

$= \frac{2(1+i)}{i(1+i)}$ 4

$= \frac{2}{i}$ 1

$= -2i$ 5

2.º Processo:

$\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{i(1+i)} =$

$= -i + \frac{1-i}{2} + \frac{-1-i}{2}$ .... 10 (2+3+5)

$= \frac{-2i+1-i-1-i}{2}$ 3

$= -2i$ 2

1.1.2. .... **10**

$$\frac{2+2i}{\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{12}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8}\,cis\,\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{12}}$$ .... 8 (4+4)

$$= 2\,cis\,\frac{\pi}{6}$$ .... 2 (1+1)

1.2. .... **15**

$$(z_1)^3 = (z_2)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2i)^3 = \left(2\,cis\,\frac{\pi}{6}\right)^3$$ 3

$$\Leftrightarrow -8i^3 = 8\,cis\,\frac{\pi}{2}$$ .... 8 (4+4)

$$\Leftrightarrow 8i = 8i$$ .... 4 (2+2)

2.1.1. .... **14**

$$|x| > \sqrt{x} \quad \wedge x \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 > x \quad \wedge x \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow$$ 4

$$\Leftrightarrow x^2 - x > 0 \quad \wedge x \in \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow$$ 1

$$\Leftrightarrow x \in \left]1, +\infty\right[$$ 8

Conclusão 1

2.1.2. .... **6**

Aderência de B.. 3

Derivado de B.. 3

2.2.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

$u_{n+1} - u_n =$

$= u_n \left(\frac{1}{2}\right)^n - u_n$ 2

$= u_n \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$ 2

Justificar que $\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 < 0, \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ 5

Conclusão 1

2.º Processo:

$u_{n+1} = u_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 3

Justificar que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1, \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ 5

Conclusão 2

2.2.2. .... **20**

Justificar que a sucessão (u_n) é limitada 5

Concluir que a sucessão (u_n) é convergente 5

$\lim u_{n+1} = \lim u_n$ 2

$\lim \left[u_n \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim u_n$ 2

Referir que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende para zero 3

Conclusão 3

3.1. .... **10**

$f'(x) =$

$= 2\,e^{2x}\,.\,(2x+1) + e^{2x}.\,2$ 6

$= 4\,e^{2x}\,.\,(x+1)$ 4

3.2. .... **15**

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ 5

Estudar o sinal de f' (que pode ser apresentado através de um quadro) 7

Concluir que a função é decrescente em $]-\infty, -1[$, crescente em $]-1, +\infty[$ e mínima para $x = -1$ 3

3.3. .... **15**

Equacionar o problema: $e^{2x}(2x+1) = 4\,e^{2x}(x+1)$ 5

$e^{2x}(2x+1) = 4\,e^{2x}(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 4\,(x+1)$ 4

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ 3

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -2\,e^{-3}$ 3

4.1. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Equacionar o problema: $arc\,cos\,(5\,x) = \dfrac{2\,\pi}{3}$ 5

$arc\,cos\,(5\,x) = \dfrac{2\,\pi}{3} \Leftrightarrow 5\,x = cos\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right)$ 5

$x = -\dfrac{1}{10}$ 5

2.º Processo:

$arc\,cos\,(5\,x) = y \Leftrightarrow 5\,x = cos\,y$ 5

$5\,x = cos\,y \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}\,cos\,y$ 1

$g^{-1}(x) = \dfrac{1}{5}\,cos\,x$ 3

$g^{-1}\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{5}\,cos\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right)$ 1

$g^{-1}\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{10}$ 5

4.2. 15

$$\lim_{x \to \frac{1}{5}} \frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{5}} \frac{\sqrt{1-25\,x^2}}{arc\,cos\,(5\,x)}$$ 1

$$= \lim_{x \to \frac{1}{5}} \frac{\frac{-50\,x}{2\sqrt{1-25\,x^2}}}{-\frac{5}{\sqrt{1-25\,x^2}}}$$ .... 8 (4+4)

$$= \lim_{x \to \frac{1}{5}} (5\,x)$$ 5

$$= 1$$ 1

A.1. 15

Justificar a comutatividade e a associatividade da operação $*$ em $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ 1

$a * u = a$ 1

$a * u = a \Leftrightarrow a + u - 3\,a\,u = a$ 1

$u = 0$ 2

$a * a' = 0$ 2

$a * a' = 0 \Leftrightarrow a + a' - 3\,a\,a' = 0$ 1

$a' = -\frac{a}{1-3\,a}$ para $a \neq \frac{1}{3}$ .... 5 (3+2)

Conclusão 2

A.2.1. 15

$$a * (b\,\theta\,c) =$$

$$= a * \left(b + c - \frac{1}{3}\right)$$ 1

$$= a + b + c - \frac{1}{3} - 3\,a\left(b + c - \frac{1}{3}\right)$$ 2

$$= 2\,a + b + c - 3\,a\,b - 3\,a\,c - \frac{1}{3}$$ 2

$(a * b)\ \theta\ (a * c) =$

$= (a + b - 3ab)\,\theta\,(a + c - 3ac)$ .... 2 (1+1)

$= a + b - 3ab + a + c - 3ac - \frac{1}{3}$ 2

$= 2a + b + c - 3ab - 3ac - \frac{1}{3}$ 1

Conclusão 5

A.2.2. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Evocar a lei do anulamento do produto num corpo 10

2.º Processo:

$x * y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - 3xy = \frac{1}{3}$ 1

$\Leftrightarrow 3x + 3y - 9xy - 1 = 0$ 1

$\Leftrightarrow 3x - 1 - 3y(3x - 1) = 0$ 2

$\Leftrightarrow (3x - 1)(1 - 3y) = 0$ 4

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ \vee\ y = \frac{1}{3}$ 2

B.1. .... **10**

$b = 3$ 1

$9 = 4 + a^2$ 3

$a = \sqrt{5}$ 1

Eixo menor $= 2\sqrt{5}$ 2

Excentricidade $= \frac{2}{3}$ 3

B.2. ....**15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = 6$ 5

$\frac{5}{3} + \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 16} = 6$ 5

$6 = 6$ 5

2.º Processo:

$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 5

$\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{5} + \frac{2^2}{9} = 1$ 5

$1 = 1$ 5

B.3. ....**15**

$2p = 8$ 6

O foco da parábola P é $(0, 2)$ 9