Proposta de resolução da prova de Matemática - 235.

José Paulo Coelho (zepaulo2001@hotmail.com)

Junho de 2002.

1.1.1.

$$\begin{aligned}
z_1 =& \frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{i(1+i)} \\
=& \frac{1(1+i)}{i(1+i)} + \frac{1i}{i(1+i)} + \frac{1}{i(1+i)} && \text{determina-se o m.m.c} \\
=& \frac{(1+i)+i+1}{i(i+1)} = \frac{2+2i}{i^2+i} && \text{efectuam-se os cálculos} \\
=& \frac{2+2i}{-1+i} = \frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} && \text{multiplicam-se numerador e denominador por } \overline{-1+i} \\
=& \frac{-2-2i-2i+2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-4i}{2} \\
=& -2i.
\end{aligned}$$

Portanto, $z_1 = -2i$.

1.1.2. Começaremos por colocar o número $z = 2 + 2i$ na forma trigonométrica. Supondo que $z = \rho cis(\theta)$, vem $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$. Por outro lado, a imagem geométrica deste número situa-se no primeiro quadrante do plano de Argand, o que conjuntamente com o facto de $\arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, nos leva a concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$. Deste modo, $z = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{2+2i}{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) && \text{aplica-se a fórmula da divisão} \\
&= 2cis\left(\frac{3\pi - \pi}{12}\right) = 2cis\left(\frac{2\pi}{12}\right) = 2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Logo, $z_2 = 2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

1.2. z_1 e z_2 são raízes cúbicas do mesmo número complexo se e só se

$$z_1^3 = z_2^3 \tag{1}$$

É esta igualdade que temos que averiguar.

- $z_1^3 = (-2i)^3 = (-2)^3(i)^3 = (-8)(-i) = 8i$;
- $z_2^3 = \left(2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = 2^3cis\left(3\frac{\pi}{6}\right) = 8cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8i$

Assim, concluímos que a igualdade (1) é verdadeira, e que, com efeito, z_1 e z_2 são raízes cúbicas do mesmo complexo (que neste caso é o $8i$).

2.1.1 $B = \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ : x > \sqrt{x}\right\} \cup \mathbb{N}_0$. Vamos resolver, em $\mathbb{R}_0^+$, a inequação

$$|x| > \sqrt{x}.$$

$|x| > \sqrt{x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 > \sqrt{x}$
$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} > 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1) > 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 0 \wedge \sqrt{x} \neq 0$ porque $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \sqrt{x} \geq 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \wedge x \neq 0$ já que $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\Leftrightarrow x > 1 \wedge x \neq 0$
$\Leftrightarrow x > 1.$

Podemos então afirmar que

$$A = \left]1, +\infty\right[$$

Logo,

$B = A \cup \mathbb{N}_0$
$= \left]1, +\infty\right[\cup \{0, 1, 2, \dots\}$
$= \{0, 1\} \cup \left]1, +\infty\right[$
$= \{0\} \cup \left[1, +\infty\right[$

2.1.2 Temos int$(B)= \left]1, +\infty\right[$ e fr$(B)= \{0, 1\}$, donde vem que a aderência de B será o conjunto $\{0, 1\} \cup \left]1, +\infty\right[$, ou seja, ad$(B)= B$. Por outro lado, só o zero é que é ponto isolado do conjunto B, tendo-se por isso $B' = \left[1, +\infty\right[$.

2.2.1 Observe-se que

$$u_{n+1} = u_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow u_{n+1} \times 2^n = u_n \tag{2}$$

Assim,

$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_{n+1} \times 2^n$
$= u_{n+1} \times (1 - 2^n)$

Uma vez que $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > 2^0 = 1$, vem $\forall n \in \mathbb{N} : -2^n < -1$ e, finalmente, $\forall n \in \mathbb{N} : 1 - 2^n < 0$. Pelo facto de no enunciado ser referido que a sucessão tem apenas termos positivos, tem-se que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} > 0$. Conjugando estas duas conclusões, temos que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \times (1 - 2^n) < 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n < 0$. Por conseguinte, a sucessão é monótona decrescente.

2.2.2 Já vimos que a sucessão era monótona decrescente, pelo que $\forall n \in \mathbb{N} :$ $u_n \leq u_1 = 2$. Por outro lado, o enunciado refere que a sucessão tem apenas termos positivos, e assim sendo ficamos a saber que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$. Portanto, a sucessão é limitada:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq 2$$

Sendo u_n monótona (decrescente) e limitada, então é convergente. Passaremos agora ao cálculo do limite. Em primeiro lugar convém observar que pelo facto de (u_n) ser convergente, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n.$$

Utilizando este facto, vem

$$\lim u_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim u_n.$$

Uma vez que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ e (u_n) é uma sucessão limitada, então estamos perante o limite do produto duma sucessão limitada por um infinitésimo, o qual sabemos ser um infinitésimo (por um teorema). Tudo isto leva à conclusão de que

$$\lim u_n = 0$$

3.1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{2x}\right)' \cdot (2x+1) + e^{2x} \cdot (2x+1)' \\ &= 2e^{2x} \cdot (2x+1) + 2e^{2x} \\ &= 2(2x+1)e^{2x} + 2e^{2x} \\ &= (4x+2)e^{2x} + 2e^{2x} \\ &= (4x+4)e^{2x} \\ &= 4(x+1)e^{2x} \\ &= 4e^{2x}(x+1). \end{aligned}$$

3.2. Iniciamos o estudo pedido pelo cálculo dos zeros da primeira derivada.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x}(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Sendo $\forall x \in \mathbb{R} : e^{2x} > 0$, o sinal de $f'(x) = 4e^{2x}(x+1)$ depende apenas do sinal do factor $(x+1)$, o qual é negativo quando $x < -1$ e positivo quando $x > -1$. Desta forma, a função f é decrescente no intervalo $]-\infty, -1]$ e crescente em $[-1, +\infty[$. Apresenta um mínimo relativo para $x = -1$, o qual é igual a $f(-1) = -e^{-2}$.

3.3.

$$\begin{aligned} f'(x) = f(x) \Leftrightarrow & \\ & \Leftrightarrow e^{2x}(2x+1) = 4(x+1)e^{2x} \\ & \Leftrightarrow e^{2x}(2x+1) - 4(x+1)e^{2x} = 0 \\ & \Leftrightarrow e^{2x}\left((2x+1) - 4(x+1)\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow e^{2x}\left(2x+1-4x-4\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow e^{2x}\left(-2x-3\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow -2x-3 = 0 \qquad \text{note que } \forall x \in \mathbb{R} : e^{2x} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

O ponto tem abcissa $-\frac{3}{2}$. Para calcular a ordenada determina-se $f\left(-\frac{3}{2}\right) = (-3+1)e^{-3} = -2e^{-3}$. Logo, o ponto de intersecção dos gráficos de f e f' é $\left(-\frac{3}{2}, -2e^{-3}\right)$.

4.1. Determinemos a expressão de g^{-1}:

$$y = \arccos(5x) \Rightarrow \cos(y) = 5x \Leftrightarrow x = \frac{\cos(y)}{5}$$

Portanto,

$$g^{-1}(x) = \frac{\cos(x)}{5}$$

Pelo exposto acima,

$$g^{-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{5} = \frac{-\frac{1}{2}}{5} = -\frac{1}{10}$$

4.2. O cálculo directo do limite leva a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usaremos a regra de Cauchy para a levantar, começando pelo cálculo das derivadas.

$$\left(\sqrt{1-25x^2}\right)' = \frac{-50x}{2\sqrt{1-25x^2}}$$
$$(\arccos(5x))' = -\frac{(5x)'}{\sqrt{1-(5x)^2}} = -\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{5}} \frac{\sqrt{1-25x^2}}{\arccos(5x)} \underset{Cauchy}{=} \lim_{x\to 1/5} \frac{\frac{-50x}{2\sqrt{1-25x^2}}}{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}} = \lim_{x\to 1/5} \frac{\frac{-50x}{2}}{-5} = \frac{\frac{-50\frac{1}{5}}{2}}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$$

A.1. Sendo $(\mathbb{R}, *)$ semigrupo comutativo, a operação $*$ é binária, associativa e comutativa no conjunto $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \subset \mathbb{R}$, $*$ também é binária, associativa e comutativa em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Falta provar que existe elemento neutro e elemento oposto para a operação $*$ em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Para averiguar a existência de elemento neutro, temos que ver se existe $e \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} : x * e = x$, atendendo a que a igualdade $x * e = e * x$ é verificada por $*$ ser comutativa.

$$\begin{aligned}
x * e = x \wedge x \neq \frac{1}{3} &\Leftrightarrow x + e - 3xe = x \wedge x \neq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow e - 3xe = 0 \wedge x \neq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow e(1-3x) = 0 \wedge x \neq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow \left(e = 0 \vee x = \frac{1}{3}\right) \wedge x \neq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow e = 0
\end{aligned}.$$

O elemento neutro é o zero. Averiguemos agora se existe elemento oposto, isto é, se para todo o $x \neq \frac{1}{3}$ existe $u \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ tal que $x * u = e = 0$.

$$\begin{aligned}
x * u = 0 \wedge x \neq \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x + u - 3xu = 0 \wedge x \neq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow u(1-3x) = -x \wedge x \neq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow u = -\frac{x}{1-3x} \wedge x \neq \frac{1}{3}
\end{aligned}.$$

Resumindo, mostrámos que $*$ é binária, associativa, que existe elemento neutro e qualquer elemento tem oposto em $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$, logo $\left(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, *\right)$ é grupo.

A.2.1. O enunciado refere que $(\mathbb{R}, \theta)$ é grupo comutativo e na alínea anterior provámos que $\left(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, *\right)$ é grupo. Então para mostrar que $(\mathbb{R}, \theta, *)$ é corpo só falta mostrar que a operação $*$ é distributiva em relação à operação θ. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, quaisquer.

$$\begin{aligned}
x * (y\theta z) = x * (y + z - \frac{1}{3}) = & \\
&= x + (y + z - \frac{1}{3}) - 3x(y + z - \frac{1}{3}) \\
&= x + y + z - \frac{1}{3} - 3xy - 3xz + x \\
&= 2x + y + z - 3xy - 3xz - \frac{1}{3} \\
&= x + y - 3xy + x + z - 3xz - \frac{1}{3} \\
&= (x + y - 3xy) + (x + z - 3xz) - \frac{1}{3} \\
&= (x * y)\theta(x * z)
\end{aligned}$$

Acabámos que provar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x * (y\theta z) = (x * y)\theta(x * z)$, donde $*$ é distributiva em relação a θ [1]e, finalmente, $(\mathbb{R}, \theta, *)$ é corpo.

A.2.2. Como $(\mathbb{R}, \theta, *)$ é corpo, então é válida a **lei do anulamento do produto**. Sendo $\frac{1}{3}$ o elemento neutro de $(\mathbb{R}, \theta)$ (porque $\forall a \in \mathbb{R} : a\theta\frac{1}{3} = a$), a lei acima referida permite-nos afirmar que $\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee y = \frac{1}{3}$.

B.1. Pelas coordenadas dos focos concluimos que a elipse tem como eixo de simetria o eixo dos yy e está centrada na origem do referencial. Supondo que $2a$ é a medida do eixo maior, $2b$ a medida do eixo menor e $2c$ a distância focal, sabemos que $a^2 - b^2 = c^2$, donde $b^2 = a^2 - c^2$. Neste caso, tem-se $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$ e $c = 2$, pelo que $b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$. Assim, $b = \sqrt{5}$ e a medida do eixo menor é $2\sqrt{5}$. Em relação à excentricidade, ela é igual a $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$.

B.2. Pelo exposto acima, a equação da elipse será $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$. Fazendo $x = \frac{5}{3}$ e $y = 2$, temos $\frac{(\frac{5}{3})^2}{5} + \frac{2^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{45} + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{25+20}{45} = 1 \Leftrightarrow \frac{45}{45} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$. Portanto, as coordenadas do ponto verificam a equação da elipse, donde se conclui que o ponto A pertence à elipse.

B.3. $x^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8y$. A parábola tem vértice na origem e a distância do foco à directriz é $p = \frac{2p}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Logo, o foco é o ponto $\left(0, \frac{p}{2}\right) = (0, 2) = F_1$, que é um dos focos da elipse.

[1]note-se que estamos a supor que $*$ é comutativa e portanto não é necessário averiguar que $(y\theta z) * x = (x * y)\theta(x * z)$