EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino
(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
2002 — **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

- um dos argmentos de z_1 é $\frac{\pi}{3}$
- o módulo de z_2 é 4

1.1.1. Seja $w = \dfrac{-1+i}{i}$

Justifique que w é diferente de z_1 e de z_2

1.1.2. z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um certo número complexo z. Sabendo que, no plano de Argand, o afixo de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

1.2. Represente, no plano de Argand, o conjunto definido pela condição

$$|z+1| = |z-i| \quad \wedge \quad 2 \leq Im(z) \leq 4$$

2.

2.1. Considere os conjuntos: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| 13 - \frac{1}{x^2} \right| \leq 12 \right\}$

$$B = \left[-\frac{1}{5}, +\infty \right[\quad \text{e} \quad C = A \cap B$$

2.1.1. Verifique que $C = \left\{ -\frac{1}{5} \right\} \cup \left[\frac{1}{5}, 1 \right]$

2.1.2. Indique o interior e a fronteira do conjunto C.

2.2. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais

$$a_n = 2^n \quad \text{e} \quad b_n = n+1$$

2.2.1. Mostre, por indução, que $a_n \geq b_n \;, \; \forall n \in \mathbb{N}$

2.2.2. Determine o valor de $\lim \left[\left(\frac{n}{b_n} \right)^{-n} + \frac{1}{a_n} \right]$

3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = log\,(1 + x^2) - log\,x$ (log designa logaritmo de base e).

3.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

3.2. Determine uma equação para cada uma das assimptotas do gráfico da função f

3.3. Resolva a condição $f(x) = log\,2$

4. Considere a função g, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, cuja derivada é definida por $g'(x) = cos\,(2\,x) + 3\,sen\,x$

4.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$

4.2. A recta tangente ao gráfico da função g, num certo ponto Q, é paralela à recta de equação $y = 2\,x$. Determine a abcissa do ponto Q.

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B**
(se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere o semigrupo comutativo $(\mathbb{R}^+, \theta)$, sendo a operação θ definida por:

$$a\,\theta\,b = \frac{a\,b}{5}\ ,\ \forall\,a,\,b \in \mathbb{R}^+$$

A.1. Justifique que $(\mathbb{R}^+, \theta)$ é um grupo.

A.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^+$ o conjunto dos múltiplos de 5.

A.2.1. Mostre que $(A\,,\,\theta)$ é um subgrupóide de $(\mathbb{R}^+, \theta)$

A.2.2. Justifique que $(A\,,\,\theta)$ não é um grupo.

B. Seja H a hipérbole de centro $(1, 0)$, com eixo transverso horizontal, distância focal igual a $2\sqrt{2}$ e de excentricidade igual a $\sqrt{2}$

B.1. Justifique que $x^2 - 2\,x - y^2 = 0$ é uma equação da hipérbole H.

B.2. Escreva as equações reduzidas das assimptotas da hipérbole H.

B.3. Seja P a parábola definida pela condição $y^2 = 8(x-2)$.
Justifique que o vértice da parábola P coincide com um dos vértices da hipérbole H e que o outro vértice de H pertence à directriz da parábola P.

FIM

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	30	
	1.1.1.	15	
	1.1.2.	15	
	1.2.	10	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1	14	
	2.1.2	6	
	2.2.	30	
	2.2.1	15	
	2.2.2	15	
3.			**40**
	3.1.	15	
	3.2.	15	
	3.3.	10	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40**
	A.1.	15	
	A.2.	25	
	A.2.1	15	
	A.2.2	10	
	ou		
B.			**40**
	B.1.	15	
	B.2.	15	
	B.3.	10	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino

(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	30	
	1.1.1.	15	
	1.1.2.	15	
	1.2.	10	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1	14	
	2.1.2	6	
	2.2.	30	
	2.2.1	15	
	2.2.2	15	
3.			**40**
	3.1.	15	
	3.2.	15	
	3.3.	10	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40**
	A.1.	15	
	A.2.	25	
	A.2.1	15	
	A.2.2	10	
ou			
B.			**40**
	B.1.	15	
	B.2.	15	
	B.3.	10	
Total			**200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de 2 pontos.

Critérios específicos

1.1.1. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$$\frac{-1+i}{i} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}}{cis\,\frac{\pi}{2}}$$ .... 6 (3+3)

$$= \sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{4}$$ 6

Conclusão 3

2.º Processo

$$\frac{-1+i}{i} = 1+i$$ 6

$$|w| = \sqrt{2}$$ 3

Um argumento de w é $\frac{\pi}{4}$ 3

Conclusão 3

1.1.2. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Um argumento de z_2 é $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ 6

$z_2 = 4\,cis\,\frac{5\pi}{6}$ 3

$z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ 6

2.º Processo

$z_1 = 4\,cis\,\frac{\pi}{3}$ 3

$z = \left(4\,cis\,\frac{\pi}{3}\right)^4$ 1

$z = 4^4\,cis\,\frac{4\pi}{3}$ 1

$\sqrt[4]{z} = 4\,cis\left(\frac{\pi}{3} + k\,\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$ 1

$z_2 = 4\,cis\,\frac{5\pi}{6}$ 3

$z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ 6

1.2. .... **10**

Representação da condição $|z+1| = |z-i|$ 4

Representação da condição $2 \leq Im(z) \leq 4$ 3

Representação da conjunção das duas condições 3

2.1.1. .... **14**

$\left|13 - \frac{1}{x^2}\right| \leq 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13 - \frac{1}{x^2} \geq -12 \ \wedge\ 13 - \frac{1}{x^2} \leq 12$ .... 2 (1+1)

$\Leftrightarrow 25 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \ \wedge\ 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0$ .... 2 (1+1)

$\Leftrightarrow \left(x \leq -\frac{1}{5} \ \vee\ x \geq \frac{1}{5}\right) \wedge (-1 \leq x \leq 1 \ \wedge\ x \neq 0)$ .... 6 (3+3)

$A = \left[-1, -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5}, 1\right]$ 3

Conclusão 1

V.S.F.F.

2.1.2. 6

Interior de C 3

Fronteira de C 3

2.2.1. 15

$n = 1$ 2

Hereditariedade 13

Escrever a hipótese de indução 1
Escrever a tese de indução 1
Demonstração 11

2.2.2. 15

$\lim \left(\frac{n}{b_n}\right)^{-n} =$

$= \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}$ 1

$= \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ 2

$= e$ 4

$\lim \frac{1}{a_n} =$

$= \lim \frac{1}{2^n}$ 1

$= 0$ 6

Conclusão 1

3.1. .... **15**

$f'(x) =$

$= \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x}$ .... 4 (3+1)

$= \frac{2x^2-1-x^2}{x(1+x^2)}$ 1

$= \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}$ 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 3

Estudar o sinal de f' (que pode ser apresentado através de um quadro) 3

Concluir que a função é decrescente em $]0, 1[$, crescente em $]1, +\infty[$ e mínima para $x = 1$ 3

3.2. .... **15**

Escrever a expressão $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ 1

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - (-\infty)$ 2

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ 1

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical do gráfico de f 1

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{log(1+x^2) - log\, x}{x}$ 1

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(log(1+x^2) - log\, x\right)'}{(x)'}$ 1

$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x} \right)$ 1

$m = 0$ 2

$b = \lim_{x \to +\infty} (log(1 + x^2) - log\, x)$ 1

$b = \lim_{x \to +\infty} log \frac{1+x^2}{x}$ 1

$b = +\infty$ 2

Concluir que não existe assimptota não vertical do gráfico de f 1

3.3. .... **10**

$f(x) = log\,2 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow log\,(1\,+\,x^2) - log\,x = log\,2$ 1

$\Leftrightarrow log\,\frac{1+x^2}{x} = log\,2$ 4

$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{x} = 2$ 2

$\Leftrightarrow x = 1$ 3

4.1. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} =$

$= g'(0)$ 10

$= cos\,(0) + 3\,sen\,(0)$ 1

$= 1$ 4

2.º Processo:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(g(x)-g(0))'}{(x)'}$ 5

$= \lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ 5

$= cos\,(0) + 3\,sen\,(0)$ 1

$= 1$ 4

4.2. .... **15**

Equacionar o problema: $g'(x) = 2$ 3

$cos\,(2\,x) + 3\,sen\,(x) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cos^2\,x \;-\, sen^2\,x + 3\,sen\,x = 2$ 3

$\Leftrightarrow \; -\,2\,sen^2\,x + 3\,sen\,x - 1 = 0$ 3

$\Leftrightarrow sen\,x = 1 \;\vee\; sen\,x = \dfrac{1}{2}$ 3

Concluir que a abcissa do ponto Q é igual a $\dfrac{\pi}{6}$ 3

A.1. .... **15**

$a\,\theta\,u \;= a$ 2

$a\,\theta\,u \;= a \Leftrightarrow \dfrac{a\,u}{5} \;= \;a$ 2

$u \;=\; 5$ 2

$a\;\theta\,a' \;= 5$ 2

$a\;\theta\,a' \;= 5 \Leftrightarrow \dfrac{a\,a'}{5} \;= \;5$ 2

$a' \;=\; \dfrac{25}{a}$ 3

Conclusão 2

A.2.1. .... **15**

Considerar $a \;= 5\,m$, $b \;= 5\,l$ com $m,\, l \in \mathbb{N}$.. 4

$a\;\theta\,b \;=\; \dfrac{5\,m \times 5\,l}{5}$ 3

$a\;\theta\,b \;= 5\,m\,l$ 3

Conclusão 5

A.2.2. .... **10**

Explicitar um elemento de A cujo oposto, em $(\mathbb{R}^+, \theta)$, não pertença a A 10

V.S.F.F.

B.1. 15

Concluir que $a = 1$ 4

$2 = 1 + b^2$ 4

$b^2 = 1$ 1

Escrever a equação da hipérbole $(x-1)^2 - y^2 = 1$ 4

Conclusão 2

B.2. 15

$\frac{b}{a} = 1$ 5

$y = x - 1$ e $y = -x + 1$ .... 10 (5+5)

B.3. 10

Os vértice da hipérbole H são os pontos $(2,0)$ e $(0,0)$ 2

O vértice da parábola P é $(2,0)$ 2

$2p = 8$ 2

$\frac{p}{2} = 2$ 1

Uma equação da directriz é $x = 0$ 2

Concluir que o vértice $(0,0)$ pertence à directriz da parábola 1