EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino

(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2002

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar e apresente todas as justificações que entender necessárias.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária)

1.1. Determine os números reais b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio $x^2 + b\,x + c$

1.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$. Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$, para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo ($\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).

1.3. Represente, num diagrama de Argand, o conjunto de pontos definido pela condição

$$\frac{3\pi}{4} \leq arg(z - z_1) \leq \frac{5\pi}{4} \quad \wedge \quad Re(z) \geq 0$$

2.

2.1. Considere os conjuntos: $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - 9\right| \leq 3 - x\right\}$

$B =]-3, +\infty[$

2.1.1. Verifique que $A \cap B =]-3, -2] \cup \{3\}$

2.1.2. Indique o interior e a fronteira do conjunto $A \cap B$.

2.2. Considere a sucessão (u_n), definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{16}{9} \\ u_{n+1} = \dfrac{4 + u_n}{3} \end{cases}$$

2.2.1. Utilizando o método de indução matemática, mostre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 - \frac{2}{3^{n+1}}$$

2.2.2. Determine $\lim (u_n - 1)^{3^n}$

V.S.F.F.

3. Considere as funções:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = \frac{1}{3} + 2\,e^{1-x}$$

$$g : [\,0,\ \pi] \to \mathbb{R}, \text{ definida por } g(x) = 2\,sen\,x \ - \ cos\,x$$

3.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas paralelas aos eixos coordenados.

3.2. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, justifique que $\frac{1}{2}$ pertence ao contradomínio da função g.

3.3. Resolva a equação $f(x) = 1$, apresentando a solução da equação na forma $log\,(k\,e)$, onde k representa um número real positivo.
(log designa logaritmo de base e)

4. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 1 + \ cos\,x$

4.1. Determine $\alpha \in \left]0, \pi\right[$ tal que $h(3\alpha) + h(\alpha) = 2 + cos(2\alpha)$

4.2. Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{h(x)}{(x-\pi)^2}$

RESPONDA APENAS A **UM** DOS GRUPOS: **A** OU **B** (se responder aos dois grupos e não explicitar qual deles pretende que seja considerado, será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar).

A. Considere os **semigrupos comutativos** $(\mathbb{R}^+,\ \theta)$ e $(\mathbb{R},\ \phi)$, sendo as operações θ e ϕ definidas por:

$$a\,\theta\,b = \frac{a\,b}{2}\ ,\ \forall a,\, b \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad a\,\phi\,b = a + b - 2\ ,\ \forall a,\, b \in \mathbb{R}$$

A.1. Mostre que $(\mathbb{R}^+,\ \theta)$ é um grupo.

A.2. Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + log_2 x$
Justifique que f é um isomorfismo de $(\mathbb{R}^+,\ \theta)$ sobre $(\mathbb{R},\ \phi)$

A.3. Tenha em conta a alínea anterior, para responder às duas questões seguintes:

A.3.1. Justifique que $(\mathbb{R},\ \phi)$ é um grupo.

A.3.2. Determine a expressão analítica de uma função g que seja um isomorfismo de $(\mathbb{R},\ \phi)$ sobre $(\mathbb{R}^+,\ \theta)$

B. Considere a parábola $\mathcal{P}$ de vértice na origem e cuja directriz é a recta de equação $y = 1$

B.1. Justifique que uma equação da parábola $\mathcal{P}$ é $y = -\dfrac{x^2}{4}$

B.2. Seja A um ponto da parábola $\mathcal{P}$. Sabendo que a distância de A ao foco é 5, indique, justificando, a distância de A ao eixo Ox.

B.3. Determine uma equação da recta tangente à parábola, no ponto de abcissa 4.

FIM

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	13	
	1.2.	14	
	1.3.	13	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1	14	
	2.1.2	6	
	2.2.	30	
	2.2.1	15	
	2.2.2	15	
3.			**40**
	3.1.	13	
	3.2.	12	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40**
	A.1.	13	
	A.2.	13	
	A.3.	14	
	A.3.1	5	
	A.3.2	9	
	ou		
B.			**40**
	B.1.	13	
	B.2.	13	
	B.3.	14	
Total			**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — Via de Ensino

(1.º, 2.º e 5.º cursos)

Duração da prova: 120 minutos

2002

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

1.			**40**
	1.1.	13	
	1.2.	14	
	1.3.	13	
2.			**50**
	2.1.	20	
	2.1.1	14	
	2.1.2	6	
	2.2.	30	
	2.2.1	15	
	2.2.2	15	
3.			**40**
	3.1.	13	
	3.2.	12	
	3.3.	15	
4.			**30**
	4.1.	15	
	4.2.	15	
A.			**40**
	A.1.	13	
	A.2.	13	
	A.3.	14	
	A.3.1	5	
	A.3.2	9	
ou			
B.			**40**
	B.1.	13	
	B.2.	13	
	B.3.	14	
Total			**200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de 2 pontos.

Critérios específicos

1.1. 13

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Escrever a igualdade $(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$ 4

Mostrar que $b = -2 \wedge c = 2$ 9

$$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$$

$\Leftrightarrow 2i + b(1+i) + c = 0$ 3

$\Leftrightarrow b + c + (b+2)i = 0$ 2

$\Leftrightarrow b + c = 0 \wedge b + 2 = 0$ 2

$\Leftrightarrow b = -2 \wedge c = 2$ 2

2.º Processo:

$x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$ 2

Concluir que $\dfrac{-b}{2} = 1$ e que $\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2} = i$ 3

Concluir que $b = -2$ e que $c = 2$ .... 8 (1+7)

1.2. .... **14**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo:

Referir que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ 3

Concluir que um argumento de $\overline{z_2}$ é, por exemplo, $\frac{3\pi}{4}$ 5

Concluir que $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 6

Nota:

Se o examinando escrever $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, em vez de $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 6 pontos previstos para este passo.

2.º Processo:

$z_1 = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 3

$\overline{z_2} = cis(-\alpha)$ 2

$z_1 \times \overline{z_2} = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 3

$\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **(ver nota)** 3

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 3

Nota:

Se o examinando escrever $\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi$, em vez de $\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi$, e daí concluir que $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 6 pontos previstos para estes dois passos, a menos que adicione 2π a $-\frac{3\pi}{4}$, de forma a obter a solução correcta.

3.º Processo:

$\overline{z_2} = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$ 2

$z_1 \times \overline{z_2} = (\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha) + i\ (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)$ 2

$\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha < 0 \quad \wedge \quad \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha = 0$ ....4 (2+2)

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 6

Nota:
Se o examinando escrever $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, em vez de $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 6 pontos previstos para este passo.

1.3... **13**

Representação do conjunto de pontos definido pela condição $\frac{3\pi}{4} \leq arg(z - z_1) \leq \frac{5\pi}{4}$ 6

Representação do conjunto de pontos definido pela condição $Re\,(z) \geq 0$ 4

Intersecção dos dois conjuntos anteriores 3

2.1.1. .... **14**

$|\,x^2 - 9\,| \leq 3 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 \geq -3 + x \quad \wedge \quad x^2 - 9 \leq 3 - x$ 2

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + x - 12 \leq 0$ 2

$\Leftrightarrow x \in \,]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[\quad \wedge \quad x \in [-4, 3]$ 6

$A = [-4, -2] \cup \{3\}$ 3

$A \cap B = \,]-3, -2] \cup \{3\}$ 1

2.1.2. .... **6**

Interior de $A \cap B = \,]-3, -2[$ 3

Fronteira de $A \cap B = \{-3, -2, 3\}$ 3

2.2.1. .... **15**

Verificar que a propriedade é verdadeira para $n = 1$ 3

Hereditariedade 12

Escrever a hipótese de indução 1

Escrever a tese de indução 1

Demonstração 10

$u_{n+1} = \dfrac{4 + 2 - \frac{2}{3^{n+1}}}{3}$ 4

Restantes cálculos 6

2.2.2. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

$\lim\left(u_n - 1\right)^{3^n} =$

$= \lim\left(1 - \dfrac{2}{3^{n+1}}\right)^{3^n}$ 3

$= \lim\left(1 - \dfrac{2/3}{3^n}\right)^{3^n}$ 7

$= e^{-2/3}$ 5

2.º Processo:

$\lim\left(u_n - 1\right)^{3^n} =$

$= \lim\left(1 - \dfrac{2}{3^{n+1}}\right)^{3^n}$ 3

$= \lim\left[\left(1 - \dfrac{2}{3^{n+1}}\right)^{3^{n+1}}\right]^{1/3}$ 6

$= \left(e^{-2}\right)^{1/3}$ 5

$= e^{-2/3}$ 1

3.1. .... **13**

Justificar a não existência de assimptotas verticais (pelo facto de f ser uma função contínua em $\mathbb{R}$) 2

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ 3

Concluir que o gráfico de f não tem assimptota horizontal, quando $x \to -\infty$ 2

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ 4

Concluir que a recta de equação $y = \frac{1}{3}$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 2

3.2. .... **12**

Justificar a continuidade da função g 2

$g(0) = -1$ 2

$g(\pi) = 1$ 2

Conclusão 6

3.3. .... **15**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:
Neste processo, usa-se a informação dada no enunciado de que a solução da equação é da forma $log(ke)$.

$\frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-log(ke)} = 1$ 2

$\Leftrightarrow e^{1-log(ke)} = \frac{1}{3}$ 1

$\Leftrightarrow \frac{e}{ke} = \frac{1}{3}$ **(ver nota)**.......... 10

$\Leftrightarrow k = 3$ 2

Nota:

O examinando pode obter esta igualdade, a partir da anterior, por aplicação da propriedade $e^{a-b} = e^a/e^b$, ou por aplicação da função logaritmo a ambos os membros da igualdade anterior. Neste último caso, estes 10 pontos deverão ser distribuídos da seguinte forma:

$1 - log\,(k\,e) = log\left(\frac{1}{3}\right)$ 4

$\Leftrightarrow log\left(\frac{e}{k\,e}\right) = log\left(\frac{1}{3}\right)$ 4

$\Leftrightarrow \frac{e}{k\,e} = \frac{1}{3}$ 2

2.º Processo:

Resolver a equação $\frac{1}{3} + 2\,e^{1-x} = 1$.. 9

$\frac{1}{3} + 2\,e^{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{3}$ 2

$\Leftrightarrow 1 - x = log\left(\frac{1}{3}\right)$ 6

$\Leftrightarrow x = 1 - log\left(\frac{1}{3}\right)$ 1

Apresentar a solução na forma $log\,(k\,e)$ 6

$x = 1 + log\,(3)$ 2

$x = log\,(e) + log\,(3)$ 2

$x = log\,(3e)$ 2

ou

$x = log\,(e) - log\left(\frac{1}{3}\right)$ 2

$x = log\left(\frac{e}{1/3}\right)$ 3

$x = log\,(3e)$ 1

V.S.F.F.

4.1. .... **15**

$$h(3\alpha)+h(\alpha)=2+cos(2\alpha)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow cos(3\alpha)\ +cos(\alpha)=cos(2\alpha)$ 2

$\Leftrightarrow 2\,.\,cos(2\alpha)\,.\,cos(\alpha)=cos(2\alpha)$ 3

$\Leftrightarrow cos(2\alpha)\ =\ 0\quad\vee\quad cos(\alpha)=\frac{1}{2}$ 4

$\Leftrightarrow \alpha=\ \frac{\pi}{4}\quad\vee\quad\alpha=\ \frac{\pi}{3}\quad\vee\quad\alpha=\ \frac{3\pi}{4}$ 6

4.2. .... **15**

$$\lim_{x\to\pi}\frac{h(x)}{(x-\pi)^2}\ =$$

$=\ \lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+cos\,x}{(x-\pi)^2}$ 1

$=\ \lim\limits_{x\to\pi}\frac{-sen\,x}{2\,(x-\pi)}$ 6

$=\ \lim\limits_{x\to\pi}\frac{-cos\,x}{2}$ 6

$=\ \frac{1}{2}$ 2

A.1. .... **13**

Determinar o elemento neutro 5

$a\,\theta\,u\ =\ a\ \Leftrightarrow\ \frac{a\,u}{2}\ =a$ 2

$u\ =\ 2$ 3

Mostrar que todos os elementos têm oposto 8

$a\,\theta\,a'\ =\ 2\ \Leftrightarrow\ \frac{a\,a'}{2}\ =2$ 2

$\frac{a\,a'}{2}\ =2\ \Leftrightarrow\ a'\ =\ \frac{4}{a}$ 2

Referir que $\frac{4}{a}\in\mathbb{R}^+,\ \forall\,a\in\mathbb{R}^+$ 4

A.2. ....**13**

Mostrar que f é bijectiva **(ver nota)** 4

Mostrar que $f(a\,\theta\,b) = f(a)\,\phi\,f(b)$ 9

$f\,(a\,\theta\,b) =$

$= 1 + log_2\left(\frac{a\,b}{2}\right)$..2

$= log_2 a\, +\, log_2 b$..4

$f(a)\,\phi\,f(b) =$

$= 1 + log_2 a\, + 1 + \,log_2 b\, -\, 2$..............................2

$= log_2 a\, +\, log_2 b$..1

Nota:

O examinando pode limitar-se a evocar a bijectividade da função logaritmo (na base 2), de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$, para justificar a bijectividade da função f.

A.3.1. ....**5**

O examinando deve referir que se pode concluir que os dois grupóides são isomorfos, pelo que, sendo um deles um grupo, o outro também o é.

A.3.2. ....**9**

Evidenciar a intenção de determinar a função inversa de f.................... 4

Determinar a função inversa de f..5

$1 + log_2\, x\, = y\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ log_2\, x\, = y\, -\, 1$..1

$\Leftrightarrow x\, = 2^{\,y\,-1}$..3

Conclusão: $g(x) = 2^{x-1}$ 1

B.1. 13

Determinar o valor do parâmetro da parábola (2).................................... 6

Escrever a equação $x^2 = -4y$ 6

Concluir que $y = -\dfrac{x^2}{4}$ 1

B.2. 13

Referir que a distância do ponto A à recta de equação $y = 1$

é 5 6

Concluir que a distância pedida é 4 7

B.3. 14

$\left(-\dfrac{x^2}{4}\right)' = -\dfrac{x}{2}$..3

Concluir que o declive da recta é -2 3

Concluir que a ordenada do ponto de tangência é -4 3

Escrever uma equação da recta 5