

## ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade — via de ensino (1.º, 2.º e 5.º cursos)  
 Cursos Técnico-Profissionais Integrados nas Áreas de Estudos A, B e C  
 Curso Técnico de Electrotecnia — Pós-Laboral (Despacho Normativo n.º 41/93, de 18 de Março)  
 Cursos do Ensino Recorrente (Despacho n.º 30/SEEBS/93, de 6 de Julho)

Duração da prova: 1h e 30min  
 1996

1.ª FASE  
 1.ª CHAMADA

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Indique todos os cálculos que tiver de efectuar

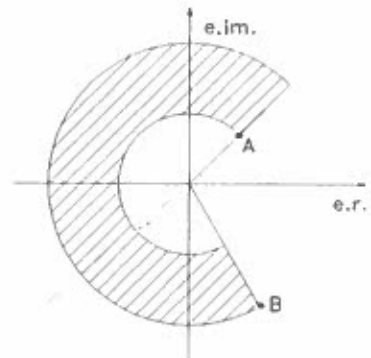
1. Considere os números complexos

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$$

- 1.1. Mostre que o afixo do número complexo que é solução da equação  $z_1 w = z_2^3$  se situa na bissetriz dos quadrantes pares.

- 1.2. Na figura, os pontos A e B são afixos, respectivamente, dos complexos  $z_1$  e  $z_2$ . Os arcos indicados são arcos de circunferência com centro na origem.



Defina por uma condição em  $\mathbb{C}$  a zona tracejada (fronteiras incluídas).

- 1.3. Determine uma equação da cónica cujos focos são os afixos de  $z_1$  e  $\bar{z}_1$  e cuja excentricidade é 2.

2. Verifique que são convergentes as sucessões  $(u_n)$  e  $(v_n)$  tais que

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4k}{n^2} \quad \text{e} \quad v_n = \left( \frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{2n}}$$

3. Considere a função  $f$ , real de variável real, definida por

$$f(x) = -\frac{\pi}{3} + x + \arccos(1 - 2x) \quad (\text{considere a restrição principal do coseno})$$

- 3.1. Determine, sob a forma de intervalo,  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > x\}$
- 3.2. Mostre que  $f$  é uma função monótona e indique, justificando, o contradomínio de  $f$ .

V.S.F.F.

4. Considere o anel comutativo  $(\mathbb{R}, \theta, \varphi)$  em que

$$a \varphi b = a + b - \frac{ab}{2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

4.1. Mostre que  $(\mathbb{R}, \theta, \varphi)$  é um corpo em que o único elemento não regular é o 2.

4.2. Resolva, justificando, a equação  $(3 \theta 2) \varphi x = 2 \varphi 1$

**PARTE DE OPÇÃO**

**Responda a um e um só dos grupos A ou B.**

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado; se não der esta indicação será classificado o grupo A.

**A**

A. De uma função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sabe-se que:

$$g'(x) = xe^{-x} + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (g' - \text{derivada de } g)$$

A.1. Justifique que  $g$  tem um e um só extremo relativo e diga, justificando, se esse extremo é máximo ou mínimo (sugestão: recorra à 2ª derivada).

A.2. Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{\log(2x^2 - 1)}$  sabendo que  $g(-1) = 0$ .

**B**

B. Considere o conjunto  $A$  e a função  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|1-x|} > \frac{1}{2} \right\} \quad h(x) = x + \cos 4x + \frac{3}{2} \sin^2 2x$$

B.1. Verifique que  $A = ]-1, 3[ \setminus \{1\}$

B.2. Mostre que  $h'(x) = 1 - \sin 4x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e, atendendo ao resultado obtido na alínea anterior, resolva a condição

$$\frac{1}{|h'(x)|} > \frac{1}{2}$$

**FIM**

## COTAÇÕES

1.	.....	20
1.2.	.....	20
1.3.	.....	20
		<hr/>
		60 pontos
2.	.....	30
		<hr/>
		30 pontos
3.		
3.1.	.....	20
3.2.	.....	20
		<hr/>
		40 pontos
4.		
4.1.	.....	20
4.2.	.....	10
		<hr/>
		30 pontos

## PARTE DE OPÇÃO

A.		
A.1.	.....	20
A.2.	.....	20
		<hr/>
		40 pontos
B.		
B.1.	.....	20
B.2.	.....	20
		<hr/>
		40 pontos
		<hr/>
		TOTAL
		200 pontos

**PONTO 235**