1.

1.1. Como o ponto A pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas, e como $\overline{OA} = 4$, temos que o ponto A tem coordenadas $(0,0,3)$.

Assim, considerando a reta é paralela À reta FC, o vetor diretor da reta FC também é um vetor diretor da reta que se pretende definir.

Assim, uma equação vetorial da reta paralela a FC e que contém o ponto A é:

$$(x,y,z) = (0,4,0) + \lambda(-5,-1,7), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, observando as equações apresentadas, podemos verificar quais os pontos que pertence à reta:

- $(-5,1,7) = (0,4,0)+\lambda(-5,-1,7) \Leftrightarrow -5 = 0-5\lambda \wedge 1 = 4-\lambda \wedge 7 = 7\lambda \Leftrightarrow 1 = \lambda \wedge \lambda = 3 \wedge 1 = \lambda$, logo o ponto $(-5,1,7)$ **não pertence** à reta;

- $(5,1,-7) = (0,4,0)+\lambda(-5,-1,7) \Leftrightarrow 5 = 0-5\lambda \wedge 1 = 4-\lambda \wedge -7 = 7\lambda \Leftrightarrow -1 = \lambda \wedge \lambda = 3 \wedge -1 = \lambda$, logo o ponto $(5,1,-7)$ **não pertence** à reta;

- $(-10,2,14) = (0,4,0)+\lambda(-5,-1,7) \Leftrightarrow -10 = 0-5\lambda \wedge 2 = 4-\lambda \wedge 14 = 7\lambda \Leftrightarrow 2 = \lambda \wedge \lambda = 2 \wedge 2 = \lambda$, logo o ponto $(-10,2,14)$ **pertence** à reta;

- $(10,2,-14) = (0,4,0) + \lambda(-5,-1,7) \Leftrightarrow 10 = 0-5\lambda \wedge 2 = 4-\lambda \wedge -14 = 7\lambda \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 = \lambda \wedge \lambda = 2 \wedge -2 = \lambda$, logo o ponto $(10,2,-14)$ **não pertence** à reta.

Assim, como o vetor diretor da reta definida na opção C é colinear com o vetor $(-5,-1,7)$, porque $(-5,-1,7) = -(5,1,7)$ então, de entre as opções apresentadas, a equação da opção C, é a única que define uma reta paralela a FC e que contém o ponto A .

Resposta: **Opção C**

1.2. Como o ponto C pertence ao plano ABC que é definido pela equação $x = 0$, a sua abcissa é nula, e como pertence à reta FC, temos que:

$$(0,y,z) = (-5,2,14) + k(-5,-1,7) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ z = 14 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ y = 2 - (-1) \\ z = 14 + 7(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}$$

De forma análoga, como o ponto F pertence ao plano xOy a sua cota é nula, e assim vem que:

$$(x,y,0) = (-5,2,14) + k(-5,-1,7) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5k \\ y = 2 - k \\ 0 = 14 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5(-2) \\ y = 2 - (-2) \\ -2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ -2 = k \end{cases}$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto C são $(0,3,7)$ e as coordenadas do ponto F são $(5,4,0)$.

Como a superfície esférica contém todos os vértices do cubo, o respetivo centro é equidistante de todos os vértices, em particular é o ponto médio do segmento de reta $[FC]$, que é uma diagonal do cubo, pelo que as coordenadas do centro são:

$$\left(\frac{0+5}{2},\frac{3+4}{2},\frac{7+0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$$

O raio da superfície esférica, r, pode ser calculado como metade do comprimento da diagonal do cubo:

$$r = \frac{\overline{CF}}{2} = \frac{\sqrt{(0-5)^2 + (3-4)^2 + (7-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{25+1+49}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2}$$

E assim, a equação cartesiana reduzida da superfície esférica é:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{75}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$

2. De acordo com o enunciado, temos que:

   - $u_1 + u_5 = 26$
   - $u_9 = 31$

   Assim, resolvendo o sistema seguinte, usando a definição de progressão aritmética ($u_5 = u_1 + 4r$ e $u_9 = u_1 + 8r$), determinamos o valor do primeiro termo (u_1) e da razão (r) da progressão:

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 26 \\ u_9 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(31 - 8r) + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 62 - 16r + 4r = 26 \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 62 - 26 = 16r - 4r \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 = 12r \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{36}{12} = r \\ u_1 = 31 - 8r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = r \\ u_1 = 31 - 8(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = r \\ u_1 = 31 - 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = r \\ u_1 = 7 \end{cases}$$

   Assim, temos que o termo geral desta progressão, é:

$$u_n = 7 + (n-1) \times 3 = 7 + 3n - 3 = 3n + 4$$

   Assim, podemos averiguar se 835 é um termo da progressão, resolvendo a equação:

$$835 = 3n + 4 \Leftrightarrow 835 - 4 = 3n \Leftrightarrow \frac{831}{3} = n \Leftrightarrow 277 = n$$

   Logo, como a solução é um número natural, temos que 835 é o termo de ordem 277 da progressão.

3. De acordo com os dados do enunciado, determinando os comprimentos da altura e das bases do trapézio, temos que:

   - $\overline{AB} = x_B - x_A = a + 4 - a = 4$
   - $\overline{AD} = y_D = f(a) = \log_{2a} a$
   - $\overline{BC} = y_C = f(a+4) = \log_{2a}(a+4)$

   Assim, o valor a para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a 4, é a solução da equação seguinte:

$$A_{[ABCD]} = 4 \Leftrightarrow \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow \frac{\log_{2a}(a+4) + \log_{2a} a}{2} \times 4 = 4 \Leftrightarrow \log_{2a}(a+4) + \log_{2a} a = \frac{4 \times 2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2a}((a+4) \times a) = 2 \Leftrightarrow \log_{2a}(a^2 + 4a) = 2 \Leftrightarrow (2a)^2 = a^2 + 4a \Leftrightarrow 4a^2 = a^2 + 4a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(3a - 4) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a = 0}_{a>1} \vee 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$$

4. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores da remuneração base média mensal, relativa aos homens, e calculando as respetivas medidas estatísticas, temos que a mediana é 904,6 euros e a amplitude interquartil é 315,4 euros.

   Observando que a remuneração base média mensal, relativa às mulheres, em 2015 era 835 euros e em 2020 era 960,3 euros, podemos verificar que o aumento foi de $960{,}3 - 825 = 135{,}3$ euros, a que corresponde um aumento percentual, a_p, relativo a 2015 de

$$\frac{825}{135{,}3} = \frac{100}{a_p} \Leftrightarrow a_p = \frac{100 \times 135{,}3}{825} \Leftrightarrow a_p = 16{,}4\%$$

   Inserindo ambas as listas de valores na calculadora gráfica podemos obter o coeficiente de correlação linear $r \approx 0{,}998$.

   Logo, as correspondências corretas são:

   - **I $\rightarrow$ c)**
   - **II $\rightarrow$ a)**
   - **III $\rightarrow$ b)**
   - **IV $\rightarrow$ c)**

5. Temos que:

   - como $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência, e o triângulo $[PQR]$ está inscrito na circunferência, então o triângulo é retângulo;
   - como a circunferência é definida pela equação $(x-1)^2 + y^2 = 9$, então o seu raio é $\sqrt{9} = 3$, pelo que:

$$\overline{PQ} = \left\| \overrightarrow{QP} \right\| = 2 \times 3 = 6$$

   - pela definição de seno, relativamente ao ângulo QPR, sabemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{QR}}{6} \Leftrightarrow 6 \operatorname{sen} \alpha = \overline{QR}$$

   - $\overrightarrow{QR}\,\hat{}\,\overrightarrow{QP} = P\hat{Q}R = \frac{\pi}{2} - Q\hat{P}R = \frac{\pi}{2} - \alpha$
   - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha$

   Logo, vem que:

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 27 \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{QR}\,\hat{}\,\overrightarrow{QP}\right) \times \left\|\overrightarrow{QR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QP}\right\| = 27 \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{QR}\,\hat{}\,\overrightarrow{QP}\right) = \frac{27}{\left\|\overrightarrow{QR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QP}\right\|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{27}{6 \operatorname{sen} \alpha \times 6} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{27}{36 \operatorname{sen} \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{27}{36} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Como α é um ângulo agudo, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

6.

6.1. Como a reta definida por $y = 3x - 5$ é uma assíntota do gráfico da função g, quando $x \to +\infty$, pela definição de assíntota, temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - (3x - 5)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (g(x) - 3x + 5) = 0$$

Resposta: **Opção D**

6.2. Como a função é contínua em $x = 0$, temos que

$$g(0) = \lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^+} g(x)$$

Como $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 2$, porque f é contínua, e calculando $\lim_{x\to0^-} g(x)$, temos:

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{-x^2 + 2x} = \frac{e^{-k}(e^0 - 1)}{-0^2 + 2(0)} = \frac{e^{-k} \times 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{-x^2 + 2x} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{x(-x + 2)} = \lim_{x\to0^-} \left(\frac{e^{-k}}{-x + 2} \times \frac{e^x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-k}}{-x + 2} \times \underbrace{\lim_{x\to0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} =$$

$$-\frac{e^{-k}}{-0 + 2} \times 1 = \frac{e^{-k}}{2}$$

Assim, como $\lim_{x\to0^-} g(x) = g(0)$, temos que:

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \frac{e^{-k}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{-k} = 4 \Leftrightarrow -k = \ln 4 \Leftrightarrow k = -\ln 4$$

7.

7.1. No dado existem 2 faces com um número múltiplo de 3 (nomeadamente 3 e 6), pelo que, em cada lançamento a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de 3 é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Logo e a probabilidade de este acontecimento não acorrer é $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Assim, a probabilidade de verificar 2 ocorrências do acontecimento em 3 lançamentos, sendo que a ocorrência do contrário pode acontecer no primeiro lançamento, no segundo, ou no último, é:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Resposta: **Opção D**

7.2. Como se pretende que os números sejam inferiores a trezentos mil, o algarismo das centenas de milhar deve ser 1 ou 2. Assim consideramos três tipos de algarismos que se podem formar nestas condições:

- (24???6) Se o algarismo das centenas de milhar for 2, o algarismo das dezenas de milhar que ser o 4, porque é solicitado que os algarismos 2 e 4 devem figurar um ao lado do outro. Sabemos ainda que o número deve ser par pelo que o algarismo das unidades tem que ser 6, pelo que restam 3 algarismos (1,3 e 5) para ocupar as restantes posições, ou seja, existem ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ algarismos, nas condições do enunciado, iniciados por 2.
- (1????6) Se o algarismo das centenas de milhar for 1, e o algarismo das unidades for 6, restam 4 algarismos para 4 posições, sendo que o 2 e o 4 não podem ficar separados, mas podem trocar entre si. Assim existem $2 \times 3!$ algarismos nestas condições correspondendo a considerar a possibilidade e de este conjunto (formado pelos algarismos 2 e 4) trocar conjuntamente com o 3 e 5, em 3 posições disponíveis.
- (1????2 ou 1????4)) Se o algarismo das centenas de milhar for 1, e o algarismo das unidades for 2 ou 4, o algarismo das dezenas também tem que ser 4 ou 2, respetivamente, porque estes devem figura um ao lado do outro. Assim, existem duas alternativas e restam outros restam 3 algarismos para 3 posições, pelo que existem $2 \times 3!$ algarismos nestas condições.

Desta forma o número total de números pares, formados com os algarismos do dado, menores que três milhões e com o 2 e o 4 juntos, é:

$$3! + 2 \times 3! + 2 \times 3! = 30$$

8. Temos que:

- Pelas leis de De Morgan e pela teorema do acontecimento contrário, temos que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$, e assim, vem que:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P\left(A \cup B\right) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - 9\left(A \cap B\right) = P(A \cup B)$$

- Pelo teorema do acontecimento contrário, vem que:

$$P\left(\overline{A}\right) = 3P(B) \Leftrightarrow 1 - P\left(A\right) = 3P(B)$$

- Pelo teorema da união de acontecimentos não disjuntos, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - 9P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A) = P(B) - P(A \cap B) + 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 3P(B) = P(B) + 8P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3P(B) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow 2P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{8P(A \cap B)}{2} \Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B)$$

Assim, pela definição de probabilidade condicionada, temos que:

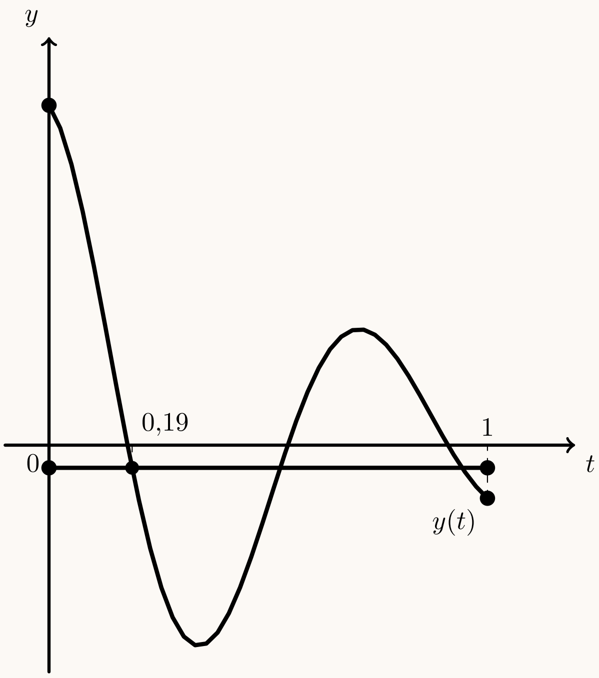
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{4P(A \cap B)} = \frac{1}{4}$$

9. Como a função y representa a oscilação da extremidade da mola em relação à posição de equilíbrio, em centímetros, os instantes em que a extremidade da mola está meio centímetro abaixo são as soluções da equação:

$$y(t) = -0{,}5$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica o gráfico das funções $f(x) = 7{,}5e^{-1{,}5x}\,\text{sen}\,(8{,}6x+1{,}6)$ e $g(x) = -0{,}5$, com $x \in [0{,}1]$, reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto de interseção que tem menor abcissa, ou seja, o primeiro dos três instantes considerados:

$$t_1 \approx 0{,}19 \text{ s}$$



10. Temos que:

- Como f' é estritamente crescente no intervalo $]0, +\infty[$, então a respetiva função derivada, $(f')'$, ou seja, f'', é positiva no mesmo intervalo. Assim temos que $f''(x) > 0, x > 0$, ou seja em $\mathbb{R}^+$ o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima, pelo que a afirmação **I.** é falsa.
- Como $f'(1) = 2$ e f' é estritamente crescente no intervalo $]1{,}5[$ (porque é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$), então a equação $f'(x) = 0$ é impossível em $]1{,}5[$, pelo que não existem extremos da função f neste intervalo, logo a afirmação **II.** é falsa.

11.

11.1. Como o declive da reta tangente ao gráfico de g, em cada ponto é dado por $g'(x)$, o declive da reta r, tangente no ponto de abcissa 0, é:

$$m_r = g'(0) = \cos(2 \times 0) + 2\,\text{sen}\,(0) = 1 + 2 \times 0 = 1$$

Como retas paralelas têm declives iguais, o declive da reta s é $m_s = m_r = 1$, pelo que a equação da reta s é da forma $s : y = x + b$.

Como a reta interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 4, contém o ponto de coordenadas $(4{,}0)$. Assim, substituindo as coordenadas na equação anterior, podemos determinar o valor da ordenada na origem:

$$0 = 4 + b \Leftrightarrow -4 = b$$

Desta forma temos que a equação reduzida da reta s, é $y = x - 4$.

11.2. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = \big(g'(x)\big)' = \big(\cos(2x) + 2\,\text{sen}\,x\big)' = \big(\cos(2x)\big)' + \big(2\,\text{sen}\,x\big)' = -(2x)'\,\text{sen}\,(2x) + 2\cos x =$$

$$= -2\,\text{sen}\,(2x) + 2\cos x = -2\big(2\,\text{sen}\,x\cos x\big) + 2\cos x = -4\,\text{sen}\,x\cos x + 2\cos x = 2\cos x\big(-2\,\text{sen}\,x + 1\big)$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x\big(-2\,\text{sen}\,x + 1\big) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x = 0 \;\vee\; -2\,\text{sen}\,x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \cos x = 0 \;\vee\; -2\,\text{sen}\,x = -1 \;\Leftrightarrow\; \cos x = 0 \;\vee\; \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\vee\; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$. Desta forma, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos x$	n.d.	$+$	$+$	$+$	n.d.
$-2\,\text{sen}\,x + 1$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
g''	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
g	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa é $x = \frac{\pi}{6}$.

12. O número complexo que tem como afixo o transformado do ponto A, afixo do número complexo z, por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ é determinado por $z \times e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Assim, como $z = -2i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$, calculando o produto, e escrevendo o resultado na forma algébrica, temos que:

$$z \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = (2 \times 1)e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{6}\right)+\frac{2\pi}{6}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\,\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} - \frac{2i}{2} = \sqrt{3} - i$$

Resposta: **Opção A**

13. Escrevendo $-1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica, temos $-1-\sqrt{3}i=\rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho=|-1-\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$
- $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta<0$ e $\cos\theta<0$, θ é um ângulo do 3.º quadrante, logo $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$

Ou seja, $-1-\sqrt{3}i=2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$.

Assim, vem que:

$$w=\frac{-1-\sqrt{3}i}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}=\frac{2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}=2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}=2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\left(\frac{16\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}\right)}=2e^{i\frac{25\pi}{12}}=2e^{i\left(\frac{25\pi}{12}-2\pi\right)}=2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Logo, como w é uma das raízes sextas de z, temos que, $w=\sqrt[6]{z}\Leftrightarrow w^6=\left(\sqrt[6]{z}\right)^6\Leftrightarrow w^6=z$, e assim podemos determinar o valor de z:

$$z=w^6=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6=2^6e^{i\frac{\pi}{12}\times 6}=64e^{i\frac{6\pi}{12}}=64e^{i\frac{\pi}{2}}=64i$$

Logo, $iz=i(64i)=64i^2=64\times(-1)=-64$.

14. Pela definição de derivada de uma função num ponto, temos que:

$$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Como a função f é par, sabemos que $f(-a)=f(a)$, determinando $f'(-a)$, vem que:

$$f(-a)=\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(a)}{x+a}=\frac{f(a)-f(a)}{-a+a}=\frac{0}{0}\ \text{(Indeterminação)}$$

(considerando $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to -a$, então $y\to a$)

Como f é par então $f(-y)=f(y)$, e pela definição de derivada num ponto, vem que:

$$\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(a)}{x+a}=\lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(a)}{-y+a}=\lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{-(y-a)}=-\lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a}=-f(a)$$

Desta forma,como $f'(a)=f(a)$, temos que:

$$f'(-a)\times f'(a)=-f'(a)\times f'(a)=-\left[f'(a)\right]^2=-\left[f(a)\right]^2$$