Exame final nacional de Matemática A **(2025, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

1. Calculando o valor do limite da sucessão, temos que:

$$\lim \frac{2n+4}{3n+5} = \lim \frac{n\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \lim \frac{2+\frac{4}{n}}{3+\frac{5}{n}} = \frac{2+\frac{4}{+\infty}}{3+\frac{5}{+\infty}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção A**

2. Relativamente a cada uma das quatro afirmações, temos que:

- Ordenando os valores relativos à produção de pera e à produção de maçã de 2019 a 2023, e identificando o valor central de cada uma das listas ordenadas, verificamos que as duas medianas são $\tilde{x}_p = 12\,197$ kg/ha (pera) e $\tilde{x}_m = 21\,330$ kg/ha (maçã), pelo que a mediana dos valores de produção de maçã excede a mediana dos valores de produção de pera em $21\,330 - 12\,197 = 9133$ kg/ha.
- Em 2021 o aumento de produção de maçã foi de $26\,644 - 20\,087 = 6557$ kg/ha relativamente a 2020, a que corresponde a seguinte percentagem, p relativamente à produção de 2020:

$$\frac{p}{100} = \frac{6557}{20\,087} \Leftrightarrow p = \frac{6557 \times 100}{20\,087} \Leftrightarrow p \approx 33\%$$

- Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos à produção de pera, entre 2019 e 2023 e calculando as respetivas medidas estatísticas, verificamos que os valores aproximados da média se o desvio padrão são, respetivamente $\overline{x} \approx 14\,485{,}8$ kg/ha e $\sigma = 3699{,}5$ kg/ha, pelo que:

$$\overline{x} + \sigma \approx 14\,485{,}8 + 3699{,}5 \approx 18\,185 \text{ kg/ha}$$

  O que permite verificar que em 2019, 2020, 2022 e 2023, a produção foi inferior a este valor, ou seja em quatro dos anos considerados.
- Como 60% do valor acumulado da produção de maçã previsto para o período de 2019 a 2024, é $136\,270 \times 0{,}6 = 81\,762$ Kg/ha, e a produção acumulada de pera no período de 2019 a 2023 foi:

$$17\,530 + 11\,565 + 20\,208 + 12\,197 + 10\,929 = 72\,429 \text{ kg/ha}$$

  Então a previsão para a produção de pera em 2024 é a diferença dos dois valores:

$$81\,762 - 72\,429 = 9333 \text{ kg/ha}$$

Logo, as correspondências corretas são:

- **I → c)**
- **II → b)**
- **III → c)**
- **IV → b)**

3.

3.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x=0$, temos que verificar se $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

- $f(0)=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}=\dfrac{1-e^{-0}}{0}=\dfrac{0^2+\ln(e\times 0+e)}{0+1}=\dfrac{\ln e}{1}=\dfrac{1}{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\dfrac{1-e^{-0}}{0}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{e^x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x}{xe^x}-\frac{1}{xe^x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{e^x}\times\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^x}\times\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=$$

$$=\frac{1}{e^0}\times 1=\frac{1}{1}\times 1=1$$

Como $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{g\to 0^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x=0$.

3.2. Para provar que a reta de equação $y=x-1$ é assíntota ao gráfico da função f quando $x\to+\infty$, vamos provar que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}-(x-1)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}-\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}-\frac{x^2-1}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln(ex+e)-x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\big(e(x+1)\big)+1}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e+\ln(x+1)+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}+\frac{1+1}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right)=$$

(considerando $y=x+1$, temos que, como $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$)

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}+\frac{2}{y}\right)=\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}+\lim_{y\to+\infty}\frac{2}{y}=0+\frac{2}{+\infty}=0+0=0$$

4. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} : (4-x)^2 > 0 \ \wedge \ 4-x > 0 \ \wedge \ 7-2x > 0\right\}$

   Como;

   - $(4-x)^2 > 0$ é uma proposição verdadeira se $4-x \neq 0$ então $(4-x)^2 > 0 \ \Rightarrow \ x \neq 4$
   - $4-x > 0 \ \Leftrightarrow \ -x > -4 \ \Leftrightarrow \ x < 4$
   - $7-2x > 0 \ \Leftrightarrow \ -2x > -7 \ \Leftrightarrow \ 2x < 7 \ \Leftrightarrow \ x < \dfrac{7}{2}$

   então $(4-x)^2 > 0 \ \wedge \ 4-x > 0 \ \wedge \ 7-2x > 0 \ \Leftrightarrow \ x < \dfrac{7}{2}$, pelo que $x \in \left]-\infty, \dfrac{7}{2}\right[$, e resolvendo a equação, temos que:

$$\frac{1}{2}e^x \ln(4-x)^2 - 5\ln(4-x) = (5-e^x)\ln(7-2x) \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2}e^x \times 2\ln(4-x) - 5\ln(4-x) = (5-e^x)\ln(7-2x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ e^x \ln(4-x) - 5\ln(4-x) = (5-e^x)\ln(7-2x) \ \Leftrightarrow \ \ln(4-x)\big(e^x-5\big) = -(e^x-5)\ln(7-2x) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \ln(4-x)\big(e^x-5\big) + (e^x-5)\ln(7-2x) = 0 \ \Leftrightarrow \ (e^x-5)\big(\ln(4-x)+\ln(7-2x)\big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (e^x-5)\ln\big((4-x)(7-2x)\big) = 0 \ \Leftrightarrow \ e^x - 5 = 0 \ \vee \ \ln\big((4-x)(7-2x)\big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ e^x = 5 \ \vee \ (4-x)(7-2x) = e^0 \ \Leftrightarrow \ x = \ln 5 \ \vee \ 28 - 8x - 7x + 2x^2 = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x = \ln 5 \ \vee \ 2x^2 - 15x - 27 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \ln 5 \ \vee \ x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(2)(27)}}{2 \times 2} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x = \ln 5 \ \vee \ x = 3 \ \vee \ x = \frac{9}{2}$$

   Assim, como $x < \dfrac{7}{2}$, $x = \dfrac{9}{2}$ não é solução da equação, pelo que o conjunto dos números reais que são solução da equação, é: $\{\ln 5{,}3\}$.

5. De acordo com os dados do enunciado, temos que:

   - $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}5 \ \Leftrightarrow \ P\left(A \setminus B\right) = 0{,}5 \ \Leftrightarrow \ P(A) - P\left(A \cap B\right) = 0{,}5$
   - $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}3 \ \Leftrightarrow \ P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}3 \ \Leftrightarrow \ 1 - P\left(A \cup B\right) = 0{,}3 \ \Leftrightarrow \ P\left(A \cup B\right) = 0{,}7$

   Logo, vem que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \Leftrightarrow \ 0{,}7 = 0{,}5 + P(B) \ \Leftrightarrow \ 0{,}2 = P(B)$$

   Resposta: **Opção A**

6. De acordo com os dados do enunciado, temos que:
   - o número de rapazes da turma é: $25 \times 0{,}64 = 16$
   - o número de rapazes com 17 anos é: $16 \times \frac{3}{4} = 12$
   - o número de rapazes com 18 anos é: $16 - 12 = 4$
   - o número de raparigas da turma é: $25 - 16 = 9$
   - o número de raparigas com 18 anos é: $9 \times \frac{1}{3} = 3$
   - o número de alunos com 18 anos é: $4 + 3 = 7$
   - o número de alunos com 17 anos é: $25 - 7 = 18$

	Rapazes	Raprigas	
17 anos	12		18
18 anos	4	3	7
	16	9	25

Logo existem ${}^{25}C_6$ grupos diferentes de seis alunos da turma, dos quais $1 \times 1 \times (18-2) \times {}^{7}C_3$ são constituídos pela Isabel, pelo José, por um dos restantes 16 alunos com 17 anos e por três alunos com 18 anos.

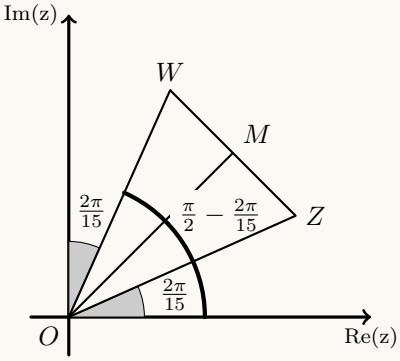
Assim, recorrendo à regra de LaPlace, a probabilidade do grupo ter esta constituição, na forma de dízima, arredondado às milésimas, é:

$$\frac{16 \times {}^{7}C_3}{{}^{25}C_6} \approx 0{,}003$$

7. Como $\overline{OZ} = \overline{OW}$ e M é o ponto médio do segmento de reta $[WZ]$, então temos que o $Z\hat{O}M = M\hat{O}W$.
Como M pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, e $Z\hat{O}M = M\hat{O}W$, então o ângulo que a semirreta $\dot{O}Z$ define com semieixo positivo real e o ângulo que a semirreta $O\dot{W}$ define com semieixo positivo imaginário também são iguais, pelo que:

$$\text{Arg}\,(w) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{15} = \frac{15\pi}{30} - \frac{4\pi}{30} = \frac{11\pi}{30}$$

Resposta: **Opção D**



8. Temos que:
   - $i^{15} = i^{3+3\times 4} = i^3 = -i$;
   - $\frac{5}{1-2i} = \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5+10i}{1^2-(2i)^2} = \frac{5+10i}{1-4\times i^2} = \frac{5+10i}{1-(-4)} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$;
   - $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{2} - \frac{2}{2}i = 1 - i$.

Assim, simplificando a expressão do número complexo z, temos:

$$z = \frac{5a(i^{15})}{1-2i} + \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = a \times \frac{5}{1-2i} \times i^{15} + \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = a(1+2i)\times(-i) + (1-i) = a(-i-2i^2) + 1 - i =$$

$$= a(2-i) + 1 - i = 2a - ai + 1 - i = 2a + 1 + i(-a-1)$$

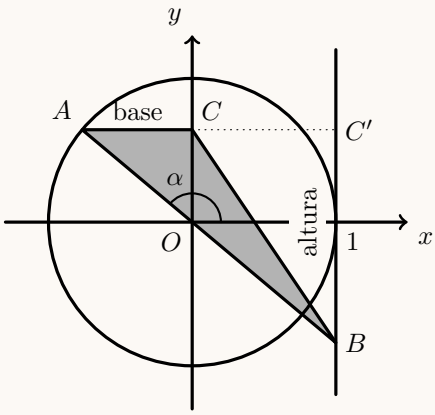
Como $\text{Im}\,(z) - \text{Re}\,(z) = 1$, vem que:

$$-a - 1 - (2a+1) = 1 \Leftrightarrow -a - 1 - 2a - 1 = 1 \Leftrightarrow -3a = 1 + 2 \Leftrightarrow -3a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{3} \Leftrightarrow a = -1$$

Logo, temos que $z = 2a + 1 + i(-a-1) = 2(-1) + 1 + i(-(-1) - 1) = -2 + 1 + i(1-1) = -1$.

E assim, como o afixo de z pertence ao semieixo real negativo e $|z| = 1$, escrevendo z na forma trigonométrica, temos $z = 1 \times e^{i\pi} = e^{i\pi}$.

9. Considerando o lado $[AC]$ como a base do triângulo, a altura será o segmento que contém o ponto B e a projeção ortogonal do ponto C, C', sobre a reta de equação $x = 1$.



Assim, como o ponto A está sobre a circunferência de centro na origem e raio 1, e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, temos que:

- $\overline{AC} = |\cos\alpha| = -\cos\alpha$
- $\overline{BC'} = \operatorname{sen}\alpha + |\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$

Assim a área do triângulo $[ABC]$, em função de α, é:

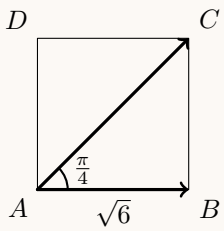
$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC'}}{2} = \frac{-\cos\alpha \times (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}{2} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos\alpha \times \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{2}{2} \times \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{4} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

10.

10.1. Como $[ABCD]$ é um quadrado de lado $\overline{AB}$ e $[AC]$ é uma diagonal, temos que:

- $\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AC} = \frac{\pi}{4}$
- $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \sqrt{6}^2 + \sqrt{6}^2 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 6 + 6 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 12 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{12}$



Pelo que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \cos\frac{\pi}{4} \times \sqrt{6} \times \sqrt{12} = 6$$

Resposta: **Opção D**

10.2. Como a base da pirâmide é um quadrado de lado $\sqrt{6}$, e o volume é $4\sqrt{6}$, podemos determinar a altura $\overline{MV}$ da pirâmide:

$$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times \overline{MV} \Leftrightarrow 4\sqrt{6} = \frac{1}{3} \times \sqrt{6}^2 \times \overline{MV} \Leftrightarrow 4\sqrt{6} = \frac{6}{3} \times \overline{MV} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{6}}{2} = \overline{MV} \Leftrightarrow \overline{MV} = 2\sqrt{6}$$

Como a pirâmide $[ABCDV]$ é regular, a reta perpendicular à base que contém o vértice V também contém o centro da base (M). Assim, a reta MV, que contém ponto M é perpendicular ao plano ABC, pelo que o vetor normal do plano ABC, $(\vec{u}(2,-1,1))$, também é um vetor diretor da reta MV, e por isso é definida pela equação vetorial:

$$(x,y,z) = (2,-1,3) + k(2,-1,1), k \in \mathbb{R}$$

Assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $(2+2k\,,\,-1-k\,,3+k)$, pelo que o vetor $\overrightarrow{MV}$ é da forma:

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (2+2k\,,\,-1-k\,,3+k) - (2,-1,3) = (2k,-k,k),\ k \in \mathbb{R}$$

E a respetiva norma é:

$$\left\|\overrightarrow{MV}\right\| = \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + k^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{6} = \sqrt{4k^2 + k^2 + k^2} \Rightarrow \left(2\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{6k^2}\right)^2 \Leftrightarrow 4 \times 6 = 6k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 = 6k^2 \Leftrightarrow \frac{24}{6} = k^2 \Leftrightarrow 4 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$$

Como o ponto V tem abcissa positiva, o valor de k correspondente é 2, e as suas coordenadas são:

$$(2+2k\,,\,-1-k\,,3+k) \underset{k=2}{=} (2+2(2)\,,\,-1-2\,,3+2) = (6,-3,5)$$

10.3. Para que sejam cumpridas as condições enunciadas existem duas alternativas distintas, que correspondem às duas parcelas da expressão que representa o número total de formas possíveis de pintar as cinco faces da pirâmide respeitando as condições enunciadas $({}^6C_4 \times 2 \times 4! + {}^6A_5)$:

- As 5 faces são coloridas com 5 cores diferentes - neste caso, como existem 6 cores disponíveis e a ordenação é relevante (porque uma das faces está identificada pelos vértices que a delimitam), então existem ${}^6A_5$ forma diferentes de colorir as 5 faces com cores diferentes.
- As 5 faces são coloridas com 4 cores, havendo um par de faces laterais opostas coloridas com a mesma cor - neste caso consideramos as escolhas de 4 cores de entre as seis disponíveis, ou seja, ${}^6C_4$ escolhas diferentes.
  Por cada uma destas escolhas devemos considerar um par de faces opostas para serem coloridas com a mesma cor, e existem 2 pares diferentes.
  Por cada grupo de 4 cores e cada par de faces laterais opostas, devemos ainda considerar o número de formas que as cores podem ser atribuídas às faces, ou seja ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ formas de fazer a atribuição das 4 cores às 4 faces (sendo que a face lateral não considerada será colorida com a cor da face oposta).
  Assim, o número de hipóeteses diferentes para esta alternativa é ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$.
- Não se considera a hipótese se ambos os pares de faces laterais estarem pintados da mesma cor, porque nesse caso seriam usadas apenas 3 cores e uma das condições a respeitar é que sejam utilizadas, no mínimo, quatro cores.

11.

11.1. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(\cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1\right)' = (\cos(3x))' + \left(\frac{3}{2}x\right)' + (1)' =$$

$$= -(3x)'\operatorname{sen}(3x) + \frac{3}{2} + 0 = -3\operatorname{sen}(3x) + \frac{3}{2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -3\operatorname{sen}(3x) + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3\operatorname{sen}(3x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x) = \frac{3}{2\times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} \vee x = \frac{5\pi}{18}$. Desta forma, estudando a variação de sinal de g'' no intervalo indicado e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{5\pi}{18}$		$\frac{\pi}{2}$
g''	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d.
g	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de g, no intervalo indicado:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{18}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$
- tem dois pontos de inflexão, cujas abcissas são $\frac{\pi}{18}$ e $\frac{5\pi}{18}$.

11.2. Calculando o declive da reta r, temos:

$$m_r = g'(0) = \cos(3\times 0) + \frac{3}{2}\times 0 + 1 = \cos 0 + 0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$$

Como as retas r e s são perpendiculares o declive da reta s, é:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{2}$$

Assim, a reta s é definida pela equação $y = -\frac{1}{2}x + b$, e interseta o eixo Oy no ponto de ordenada b. A abcissa do ponto de interseção com o eixo Ox é solução da equação seguinte:

$$0 = -\frac{1}{2}x_A + b \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_A = b \Leftrightarrow x_A = 2b$$

Assim, como a área do triângulo $[OAB]$ é 12, vem que:

$$A_{[OAB]} = 12 \Leftrightarrow \frac{|x_A| \times |y_B|}{2} = 12 \Leftrightarrow \frac{b \times 2b}{2} = 12 \Leftrightarrow b^2 = 12 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{12}$$

Desta forma, como a abcissa do ponto A é positiva, temos que $b = \sqrt{12}$ e a abcissa do ponto A é:

$$x_A = 2b = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

12. O valor total que se prevê obter com a venda é produto do preço de cada unidade, p, pelo número de unidades vendidas, $N(p)$. Assim o valor total, em função do preço é dado por $p \times N(p)$, e o preço que permite obter um valor total igual a 4000 centenas de euros é a solução da equação:

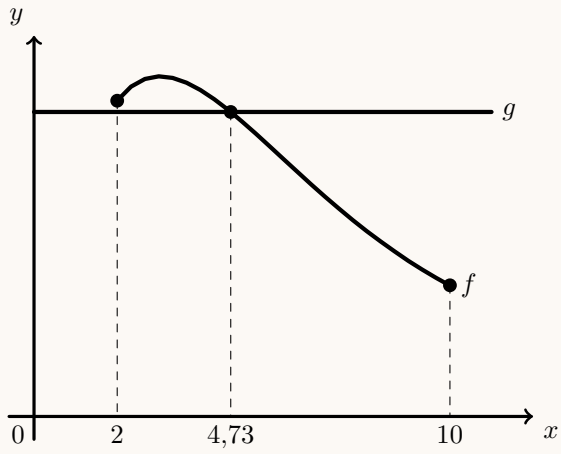
$$p \times N(p) = 4000$$

Desta forma, inserimos na calculadora gráfica as expressões das funções:

- $f(x) = x\big(4000 \times e^{-0{,}34x} - 1{,}12x + 50\big)$
- $g(x) = 4000$

e visualizamos os respetivos gráficos numa janelaa compatível com o domínio da função ($2 \leq x \leq 10$) gráficos das funções, reproduzidos na figura ao lado.
Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (arredondada às centésimas) da abcissa do ponto de interseção das funções f e g, a que correspondem o preço pretendido:

$$p \approx 4{,}73$$



Assim, o preço para o qual o valor total que se prevê obter com a venda das bicicletas Ciclatour seja igual a 4000 centenas de euros, é 4,73 centenas de euros, ou seja, 473 euros.

13. Podemos observar que em cada composição, relativamente à anterior:

- cada quadrado da composição anterior é dividido em 9;
- é retirado um destes quadrados mais pequenos, ou seja é retirado $\frac{1}{9}$ da área total da composição anterior;
- a área de cada composição é $\frac{8}{9}$ da área da composição anterior.

Assim, a sucessão das área de cada composição é uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{9}$ e primeiro termo 9, ou seja, a sucessão de termo geral:

$$u_n = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

Pelo que o valor do 50.º termo, arredondado às milésimas, é:

$$u_{50} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{50-1} \approx 0{,}028$$

14. A abcissa de um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, é a solução da equação:

$$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$$

Assim, sendo f a função definida por $f(x) = h(x) - x$, pretende-se provar que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $[0,a]$.

Como o domínio da função h é $[0,a]$ e o contradomínio também é $[0,a]$ sabemos que:

- existe $b \in [0,a]$, tal que:
  - $h(b) = 0$;
  - $f(b) = h(b) - b = 0 - b = -b$;
  - como $b \in [0,a]$, então $-b < 0$, logo $f(b) < 0$;
- existe $c \in [0,a]$, tal que
  - $h(c) = a$;
  - $f(c) = h(c) - c = a - c$;
  - como $c \in [0,a]$, então $c < a$ e $a - c > 0$ logo $f(c) > 0$;

Como a função f resulta da diferença entre duas funções contínuas em $[0,a]$, é contínua neste intervalo e também no intervalo $[b,c]$ (se $b < c$) ou no intervalo $[c,b]$ (se $c < b$).

Assim, como $f(b) < 0 < f(c)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $k \in]b,c[$ (ou $k \in]c,b[$) tal que $f(k) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $f(x) = 0$ no intervalo $]0,a[$, isto é, que existe pelo menos um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.