EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos | **1.ª Fase**
2000 | **2.ª Chamada**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

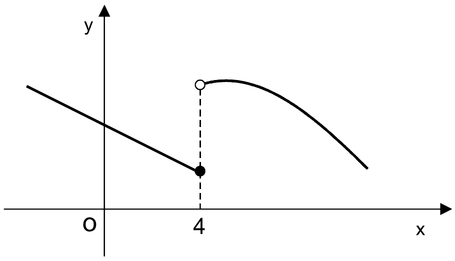
A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

(B) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \neq f(4)$

(C) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

(D) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \neq f(4)$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-3, 2]$.
Qual é o contradomínio de $|f|$?

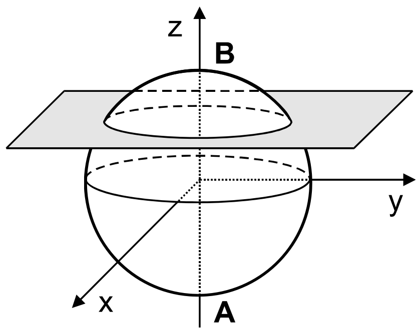
(A) $[2, 3]$

(B) $[-2, 3]$

(C) $[0, 2]$

(D) $[0, 3]$

3. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.



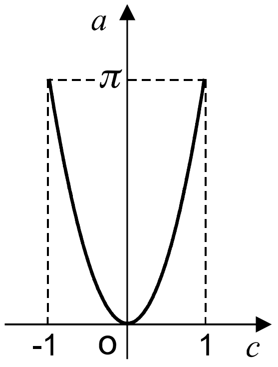
Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro $[AB]$, que está contido no eixo Oz.

Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano xOy.

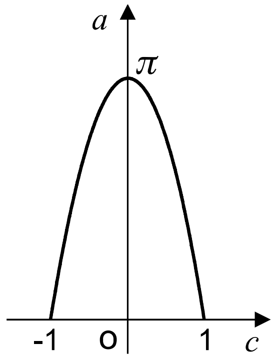
Seja g a função que faz corresponder, à cota $\boldsymbol{c}$ do ponto P, a área $\boldsymbol{a}$ da secção produzida na esfera pelo referido plano.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função g ?

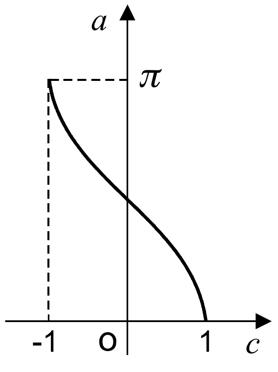
(A)



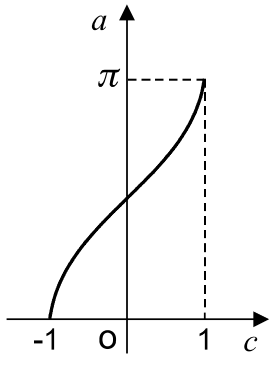
(B)



(C)



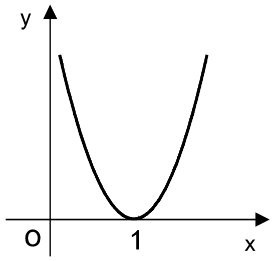
(D)



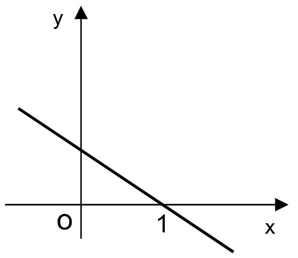
4. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1.

Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da **segunda derivada** de g ?

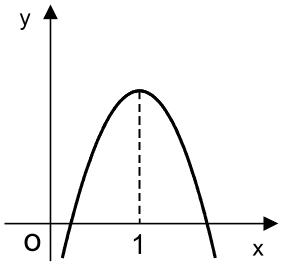
(A)



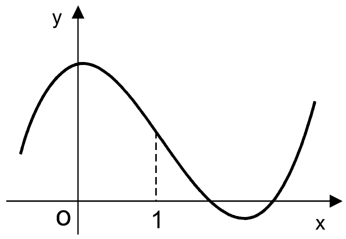
(B)



(C)



(D)



5. Considere todos os números de seis algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
Destes números, quantos têm exactamente um algarismo 4?

(A) 8^5 **(B)** 9^5 **(C)** 6×8^5 **(D)** $6 \times {}^8A_5$

6. O António escolhe, ao acaso, uma página de um jornal de oito páginas.
A Ana escolhe, ao acaso, uma página de uma revista de quarenta páginas.
Qual é a probabilidade de ambos escolherem a página 5 ?

(A) $\frac{1}{320}$ **(B)** $\frac{3}{20}$ **(C)** $\frac{1}{48}$ **(D)** $\frac{5}{48}$

7. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$
Qual poderá ser um argumento do **simétrico** de z ?

(A) $-\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\pi + \frac{\pi}{5}$ **(C)** $\pi - \frac{\pi}{5}$ **(D)** $2\pi + \frac{\pi}{5}$

Segunda Parte

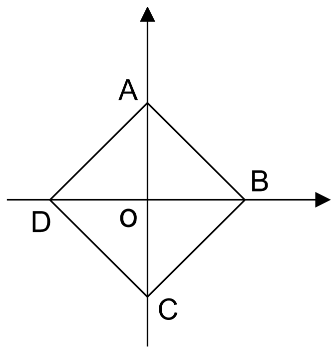
Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.

Os pontos A e C pertencem ao eixo imaginário, e os pontos B e D pertencem ao eixo real.

Estes quatro pontos encontram-se à distância de uma unidade da origem do referencial.



1.1. Sejam $w = 1 - i$ e $z = 2\ cis\ \frac{3\pi}{2}$

Sem recorrer à calculadora, mostre que as raízes quartas do complexo $\frac{w^2}{z}$ têm por imagens geométricas os pontos A, B, C e D.

1.2. Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência **inscrita** no quadrado $[ABCD]$.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

2.2. Resolva a equação $\ln[f(x)] = x$ ($\ln$ designa *logaritmo* de base e)

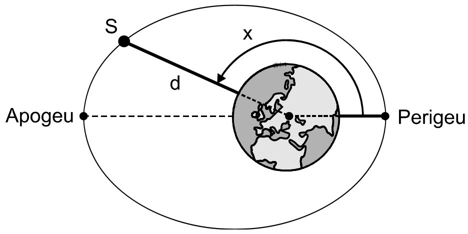
2.3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

3. Um satélite **S** tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura.

Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala.

Na elipse estão assinalados dois pontos:

- o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra;
- o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.



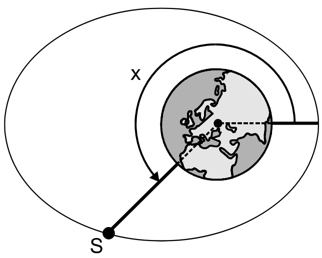
O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

A distância d, em km, do satélite ao **centro** da Terra, é dada por $d = \dfrac{7\,820}{1+0{,}07\ \cos x}$

Considere que a Terra é uma esfera de raio $6\,378$ km.

3.1. Determine a altitude do satélite (distância à **superfície** da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.

3.2. Num certo instante, o satélite está na **posição indicada na figura**.



A distância do satélite ao **centro** da Terra é, então, de $8\,200$ km.

Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.

4.

4.1. Um estudo feito a uma certa marca de iogurtes revelou que:

- se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é $0{,}005$;
- se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é $0{,}65$.

Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dos quais dois estão fora de prazo.

Escolhendo, ao acaso, um desses dez iogurtes, qual é a probabilidade de ele estar estragado?

4.2. A banda desenhada retrata um episódio de uma aula de Matemática.
A professora propõe um problema à turma, e o João e a Joana são os primeiros a responder.

Ambas as respostas ao problema proposto estão certas.
Numa pequena composição (quinze a vinte linhas, aproximadamente) explique o raciocínio de cada um dos dois alunos.

Nota: o número de linhas referido não tem um carácter vinculativo; pretende apenas dar uma indicação do grau de desenvolvimento pretendido.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 50
- **2.1.** 17
- **2.2.** 15
- **2.3.** 18

3. 34
- **3.1.** 16
- **3.2.** 18

4. 32
- **4.1.** 16
- **4.2.** 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \quad (r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \quad (r - \textit{raio})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)\,.\,(\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\,\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\,\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\,\ln\, a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$