

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
 Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos  
 2000

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

### COTAÇÕES

**Primeira Parte..... 63**

Cada resposta certa ..... +9  
 Cada resposta errada..... - 3  
 Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

**Segunda Parte ..... 137**

1. .... 51

1.1. .... 16  
 1.2. .... 17  
 1.3. .... 18

2. .... 33

2.1. .... 15  
 2.2. .... 18

3. .... 21

3.1. .... 11  
 3.2. .... 10

4. .... 32

4.1. .... 12  
 4.2. .... 10  
 4.3. .... 10

**TOTAL ..... 200**

V.S.F.F.

435/C/1

## CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Primeira Parte

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	D	B	D	A	A	D
Versão 2	B	B	A	B	C	D	B

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

### Segunda Parte

#### **Critérios gerais**

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicitar todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

**Critérios específicos**

**1.1. .... 16**

- Justificar a continuidade de  $f$  em  $[0, \pi]$  .....2
- Calcular  $f(0)$  ..... 3
- Calcular  $f(\pi)$  .....3
- Conclusão (como  $f$  é contínua em  $[0, \pi]$  e como  $f(0)$  e  $f(\pi)$  têm sinais contrários, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe, pelo menos, um zero da função no intervalo  $]0, \pi[$ )..... 8

**1.2. .... 17**

- $f'(x) = 2 + \text{sen } x$  ..... 4
- Justificar que  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  .....5
  - $2 + \text{sen } x > 0 \Leftrightarrow \text{sen } x > -2$  .....2
  - Justificar que  $\text{sen } x > -2, \forall x \in \mathbb{R}$  ..... 3
  - ou**
  - Referir que  $\text{sen } x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$  .....3
  - $\text{sen } x \geq -1 \Rightarrow f'(x) \geq 1$  .....2
  - ou**
  - Justificar que  $f'$  não tem zeros.....2
  - Justificar que  $f'$  não muda de sinal .....1  
(por exemplo: porque  $f'$  é contínua e não tem zeros)
  - Concluir que  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  .....2  
(por exemplo: porque  $f'$  não muda de sinal e  $f'(0) > 0$ )
- Concluir que  $f$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R}$  .....4
- Referir que uma função estritamente crescente não pode ter mais do que um zero .....4

**V.S.F.F.**

435/C/3

1.3. .... 18

Escrever uma equação da recta  $r$  ..... 4

Utilizar a calculadora para obter um valor aproximado da ordenada de  $B$  (ver nota 1) ..... 6

Determinar a área pedida (ver notas 2 e 3) ..... 8

**Notas:**

1. Uma utilização deficiente da calculadora poderá conduzir a uma aproximação grosseira para o valor da ordenada de  $B$ . O valor correcto, com uma casa decimal, é 5,3.  
 Apresenta-se a seguir a forma como deve ser cotado o valor obtido pelo examinando:

Valor pertencente a  $[5,1 ; 5,5]$  ..... 6

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente a  $[4,9 ; 5,7]$  ..... 3

Valor fora do intervalo anterior ..... 0

2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades (8), ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 2 pontos.
3. O processo mais natural para a obtenção da área pedida é considerar a base  $\overline{OA}$ , sendo a altura correspondente a ordenada de  $B$ , donde resulta que a área do triângulo é

$$\frac{3 \times 5,3}{2} \approx 8$$

Pode, contudo, acontecer que o examinando considere a base  $\overline{AB}$ , sendo a altura correspondente a distância da origem à recta  $AB$ . Neste caso, os 8 pontos relativos à determinação da área pedida devem ser distribuídos como a seguir se indica:

$\overline{AB} \approx 7,5$  ..... 2

Altura correspondente  $\approx 2,1$  ..... 2

Área pedida  $\approx 8$  ..... 4

**2.1. .... 15**

Substituir, na expressão de  $P(h)$ ,  $h$  por 2,35 ..... 10

$P(2,35) \approx 76$  ..... 5

**Notas:**

1. Se o examinando substituir  $h$  por 2350, a sua resposta deverá ser cotada com um máximo de 4 pontos.
2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

**2.2. .... 18**

Determinar  $x$  tal que  $P(h + x) = \frac{1}{2} P(h)$  ..... 12

$$P(h + x) = \frac{1}{2} P(h)$$

$$\Leftrightarrow 101 \cdot e^{-0,12(h+x)} = \frac{1}{2} \cdot 101 \cdot e^{-0,12h} \dots\dots\dots 2$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,12x} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 4$$

$$\Leftrightarrow -0,12x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \dots\dots\dots 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,12} \dots\dots\dots 1$$

Conclusão:  $x \approx 5,8$  (**ver nota**)..... 2

Interpretar o resultado obtido ..... 6

O examinando deverá referir que, quando se sobe 5,8 Km (em altitude), a pressão atmosférica passa para metade.

**Nota:**

Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

**3.1. .... 11**

$z_2 = (z_1)^4 = \left(\rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right)^4$  (ver nota)..... 2

$z_2 = \rho^4 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{6}$  (ver nota) ..... 5

Amplitude do ângulo  $A_1OA_2 = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$  ..... 3

Conclusão ..... 1

**Nota:**

Não se exige que o examinando explicita estes dois passos. O examinando pode limitar-se a referir que, sendo um argumento de  $z_1$  igual a  $\frac{\pi}{6}$ , resulta que um argumento de  $z_2$  é igual a  $\frac{4\pi}{6}$ .

**3.2. .... 10**

Referir que a condição  $|z| = |z_1|$  define a circunferência de centro na origem e raio  $\overline{OA_1}$  ..... 3

Perímetro da circunferência =  $4\pi \Leftrightarrow \overline{OA_1} = 2$  ..... 2

$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$  ..... 2

$z_1 = \sqrt{3} + i$  ..... 3

**4.1. .... 12**

O examinando deve utilizar:

- Leis de De Morgan
- Probabilidade do acontecimento contrário (ou probabilidade do acontecimento certo e probabilidade da união disjunta de acontecimentos)
- Probabilidade da intersecção de dois acontecimentos:  
 $P(E_2 \cap E_1) = P(E_1) \times P(E_2 | E_1)$

Indica-se a seguir a forma como esta alínea deve ser cotada:

- O examinando utiliza as três propriedades e prova a igualdade pretendida ..... 12
- O examinando utiliza as três propriedades, mas não prova a igualdade pretendida ..... 9
- O examinando utiliza apenas duas propriedades ..... 5
- O examinando utiliza apenas uma propriedade ..... 2

**4.2. .... 10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

**1.º Processo** (utilizando a igualdade da alínea anterior):

Caracterizar os acontecimentos  $E_1$  e  $E_2$   
 ( $E_1$  - a primeira carta extraída é de espadas;  
 $E_2$  - a segunda carta extraída é de espadas) ..... 2

$P(E_1) = \frac{1}{4}$  ..... 2

$P(E_2 | E_1) = \frac{12}{51}$  ..... 2

$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{12}{51}$  ..... 2

$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = \frac{16}{17}$  ..... 2

**2.º Processo:**

Probabilidade pedida =  $1 - \frac{{}^{13}C_2}{{}^{52}C_2}$  (ou  $1 - \frac{{}^{13}A_2}{{}^{52}A_2}$ ) ..... 8

Probabilidade pedida =  $\frac{16}{17}$  ..... 2

**3.º Processo:**

Probabilidade pedida =  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{39}{51}$  ..... 8  
 (A primeira carta não é de espadas, ou a primeira é, e a segunda não é)

Probabilidade pedida =  $\frac{16}{17}$  ..... 2

**V.S.F.F.**

435/C/7

Probabilidade pedida =  $\frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}}$  (ver notas 1, 2, 3, 4 e 5) .....9

Probabilidade pedida  $\approx 4\%$  .....1

**Notas:**

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.  
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}}$  (fracção correcta).....9

$\frac{{}^{13}C_6}{{}^{52}C_{13}}$  ..... 5

Outras fracções com denominador  ${}^{52}C_{13}$  .....3

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.
4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.
5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 6 pontos à sua resposta.