EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **Reserva 2**
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

–

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Uma função f tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

(A) $\operatorname{sen} x$ **(B)** e^x

(C) $1 + x^2$ **(D)** $\ln x$

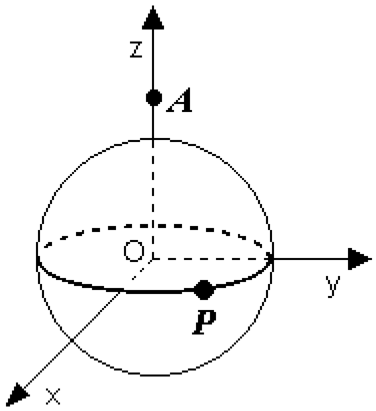
2. Indique o valor de $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0,0,4)$
- a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

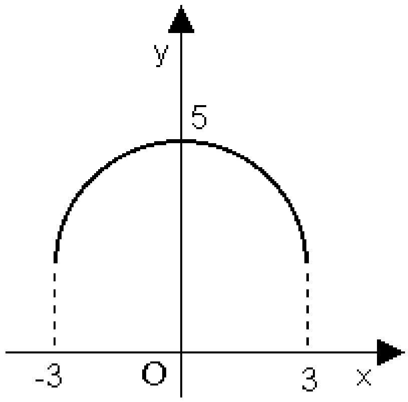
Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.



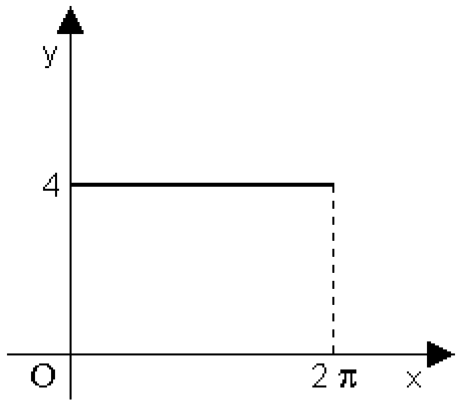
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

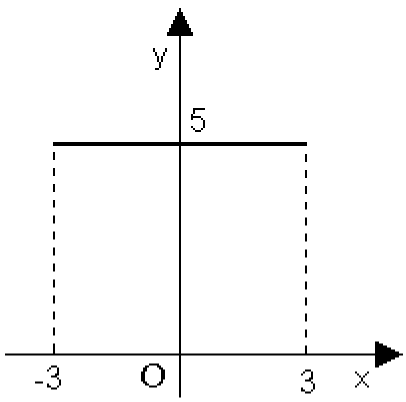
(A)



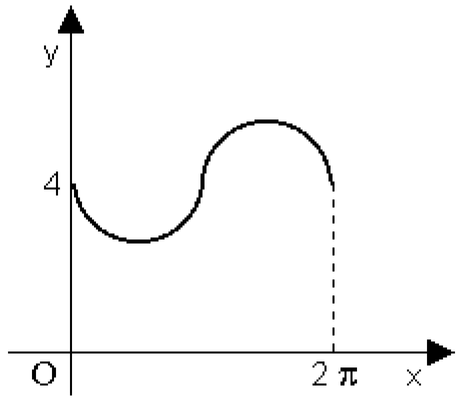
(B)



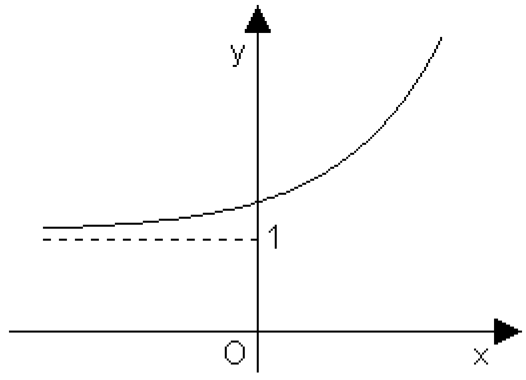
(C)



(D)

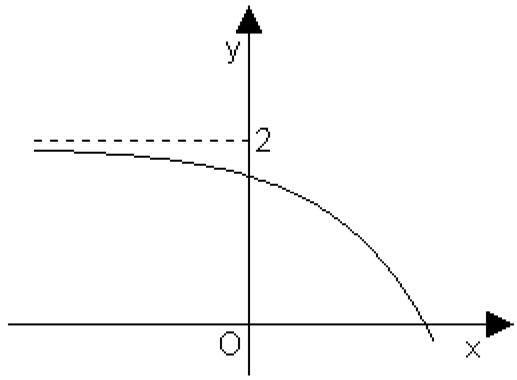


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

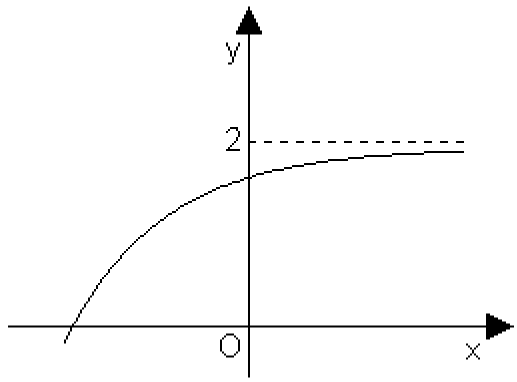


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

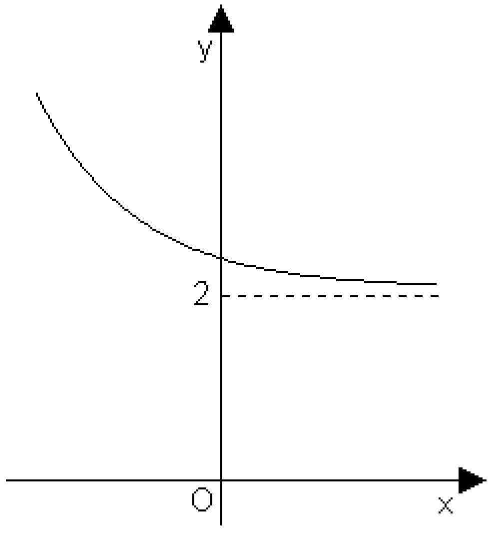
(A)



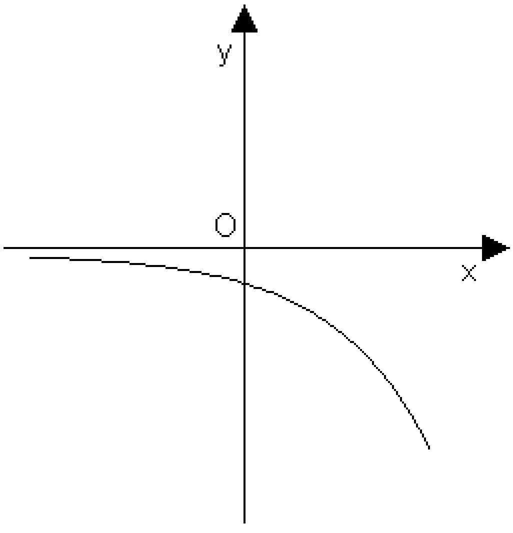
(B)



(C)



(D)

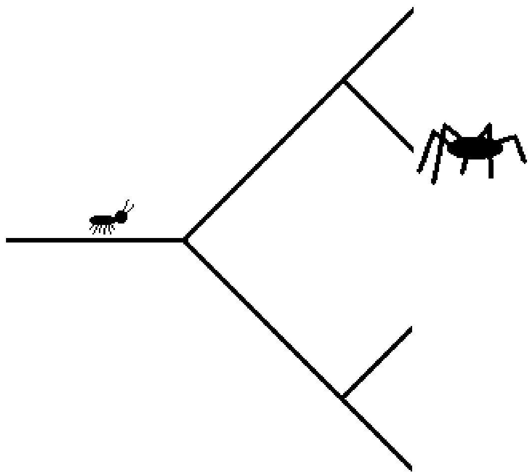


5. Quando se altera a ordem dos algarismos do número 35142, obtém-se outro número. Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 35142 .

Quantos desses números são múltiplos de 5 ?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 60 **(D)** 120

6. Uma formiga desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bifurcações. A formiga nunca inverte a sua marcha. Ao chegar a uma bifurcação, opta 70% das vezes pelo caminho da esquerda.



Qual é a probabilidade de a formiga ser apanhada pela aranha?

(A) $0,14$ **(B)** $0,21$ **(C)** $0,42$ **(D)** $0,49$

7. Considere o número complexo $z_1 = 3\sqrt{2}\, cis\, \frac{3\pi}{4}$

A imagem geométrica de z_1 pertence à região do plano complexo definida pela condição

(A) $|z| > 3$

(B) $0 < arg\,(z) < \frac{\pi}{4}$

(C) $Re(z) = 3\sqrt{2}$

(D) $Im(z) = \frac{3\pi}{4}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 7 + 24\,i \qquad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

1.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

1.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

2. Um recipiente contém uma certa quantidade de açúcar.

Para dissolver o açúcar, enche-se o recipiente com água.

Admita que a massa, em gramas, de açúcar ainda não dissolvido, t **minutos** após o início do processo de dissolução, é dada por

$$M(t) = 50\,e^{-0{,}02\,t}\ , \quad t \geq 0$$

2.1. Determine a massa de açúcar dissolvido ao longo da primeira **hora**.

Apresente o resultado em gramas, arredondado às unidades.

2.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função M quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

3. Para cada número real k, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a expressão

$$f(x) = \begin{cases} 1,2 + \operatorname{tg} x & \text{se } \ 0 \leq x \leq k \\ 2x - \ln x & \text{se } \ x > k \end{cases}$$

define uma função f, de domínio $[0, +\infty[$ $\quad$ ($\ln$ designa *logaritmo* de base e).

3.1. Nas duas alíneas que se seguem (3.1.1. e 3.1.2.), **considere** $\boldsymbol{k = 1}$.

3.1.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico, no intervalo $]1, +\infty[$

3.1.2. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $f(x) = 2 + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tem, no intervalo $]2, 3[$, pelo menos uma solução.

3.2. Existe um número real k para o qual a função f é contínua em $[0, +\infty[$.
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine um valor aproximado desse número k (arredondado às décimas).

4. Um saco contém seis bolas, numeradas de 1 a 6.
As bolas que têm números pares estão pintadas de verde.
As bolas que têm números ímpares estão pintadas de azul.
Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos:
A – As duas bolas são da mesma cor.
B – O produto dos números das duas bolas é ímpar.

4.1. Determine $P(A)$ $\quad$ (P designa probabilidade)
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4.2. Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$

5. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S).

Sabe-se que:

$$P(A) = 2\,P(B)$$
$$P(A \cup B) = 3\,P(B)$$ (P designa probabilidade).

Prove que os acontecimentos A e B são incompatíveis.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.. **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 34
2.1. 14
2.2. 20

3. 50
3.1. 34
3.1.1. 17
3.1.2. 17
3.2. 16

4. 20
4.1. 10
4.2. 10

5. 12

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ ($r - raio$)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

V.S.F.F.