EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1)=7$ e $f(3)=4$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$

(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1,3]$

(C) A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$

(D) A equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

2. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a, igual a $e^{2\ln a}$?
($\ln$ designa logaritmo de base e)

(A) $2\,a$ **(B)** $2+a$ **(C)** 2^{a} **(D)** a^2

3. A recta de equação $y=x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

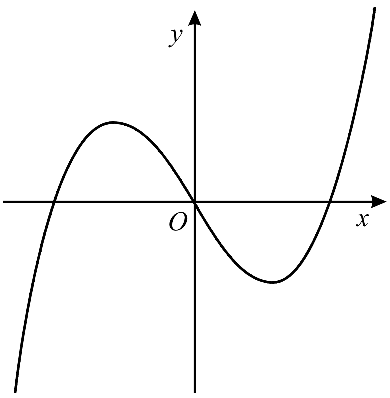
(A) x^2+x **(B)** $x^2+2\,x$ **(C)** $x^2+2\,x+1$ **(D)** x^2+x+1

4. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a sua **segunda derivada** é definida por

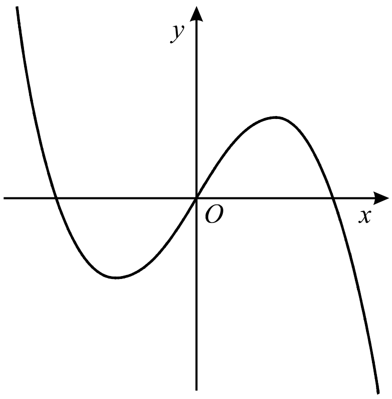
$$g''(x) = 1 - x^2$$

Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função** $\boldsymbol{g}$?

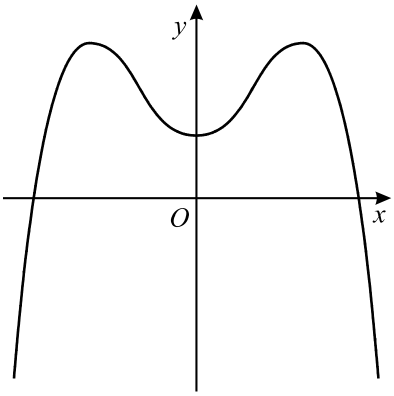
(A)



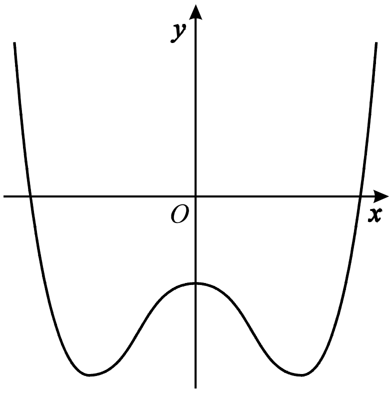
(B)



(C)



(D)



5. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*.

Quantas *capicuas* existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar ?

(A) 300 **(B)** 400 **(C)** 500 **(D)** 600

6. Uma caixa tem cinco bombons, dos quais apenas dois têm licor.

Tira-se da caixa, ao acaso, uma amostra de três bombons.

Considere que X designa a variável «*número de bombons* ***com licor*** *existentes nessa amostra*».

Qual das seguintes distribuições de probabilidades pode ser a da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{^5C_3}$	$\frac{6}{^5C_3}$	$\frac{3}{^5C_3}$

(B)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{^5C_3}$	$\frac{6}{^5C_3}$	$\frac{1}{^5C_3}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{^5C_3}$	$\frac{6}{^5C_3}$	$\frac{3}{^5C_3}$

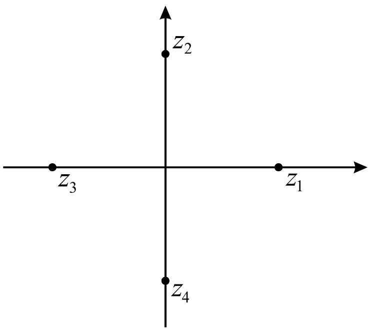
(D)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{^5C_3}$	$\frac{6}{^5C_3}$	$\frac{1}{^5C_3}$

7. Seja w um número complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Seja $\overline{w}$ o conjugado de w.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\overline{w}}$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

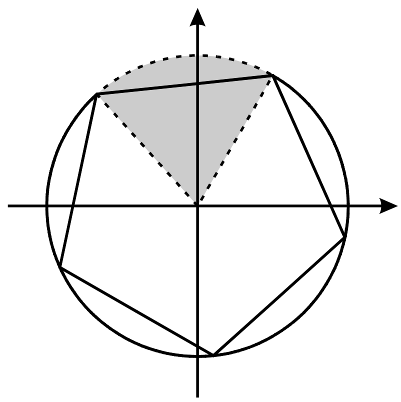
Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 2\,cis\,\frac{\pi}{3}$

1.1. Sem recorrer à calculadora, verifique que $\dfrac{z_1^3 + 2}{i}$ é um imaginário puro.

1.2. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos cinco vértices do pentágono regular representado na figura. Este pentágono está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, excluindo a fronteira.



2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 3x - 2\ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes.

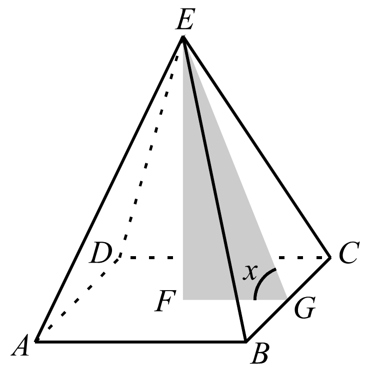
2.1.1. Estude f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.1.2. Mostre que a função f tem um único mínimo.

2.2. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas).

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

3. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.



Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x designa a amplitude do ângulo FGE

3.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por

$$A(x) = \frac{4\cos x + 4}{\cos x} \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

3.2. Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

4. Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tacto.
Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas.
Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.

4.1. Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.

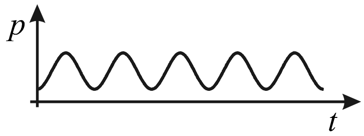
4.2. Suponha agora que, no saco, estão apenas **algumas** das quinze bolas.
Nestas novas condições, admita que, ao retirarmos, ao acaso, uma bola do saco, se tem:

- a probabilidade de essa bola ser amarela é 50 %
- a probabilidade de essa bola ter o número 1 é 25 %
- a probabilidade de essa bola ser amarela ou ter o número 1 é $62{,}5$ %

Prove que a bola amarela número 1 está no saco.

5. A Joana está a encher um balão.

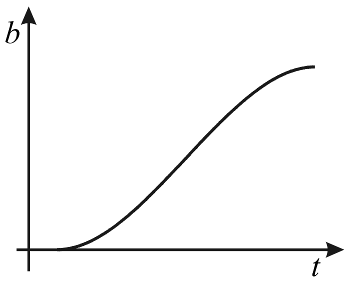
Na figura abaixo está o gráfico da função que dá a massa p de ar, nos pulmões da Joana, t segundos após o instante em que ela, pela primeira vez, começa a inspirar o ar, para encher o balão.



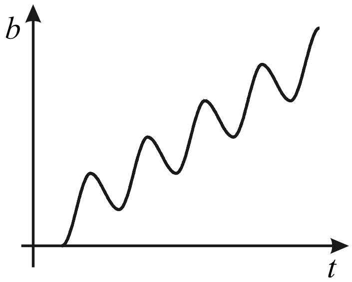
Para encher o balão, a Joana precisa de inspirar várias vezes, mas, de cada vez que inspira, mantém o pipo apertado, evitando assim que o ar saia do balão.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que dá a massa b de ar no balão, t segundos após o referido instante (aquele em que, pela primeira vez, a Joana começa a inspirar o ar, para encher o balão)?

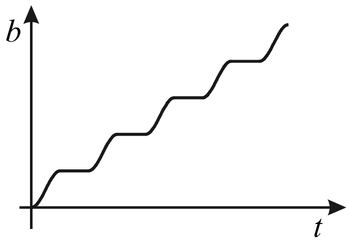
(A)



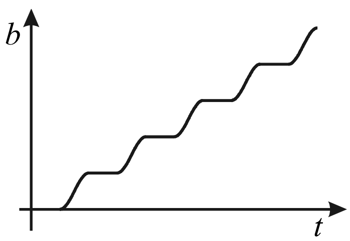
(B)



(C)



(D)



Numa pequena composição, de dez a quinze linhas, aproximadamente, justifique a sua resposta.

Note bem:
Não explique por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 43
- **2.1.** 30
  - **2.1.1.** 15
  - **2.1.2.** 15
- **2.2.** 13

3. 26
- **3.1.** 13
- **3.2.** 13

4. 32
- **4.1.** 16
- **4.2.** 16

5. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3}\times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r - raio)$

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\cos b + \text{sen}\,b\,.\cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos\,a\,.\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta+\theta')$

$\frac{\rho\, cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\,(\theta-\theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$