

## EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos  
2001

1.ª FASE  
2.ª CHAMADA  
VERSÃO 1

### PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

## VERSÃO 1

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

**Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.**

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + e^x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 3x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função  $h$ , no ponto  $0$ , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

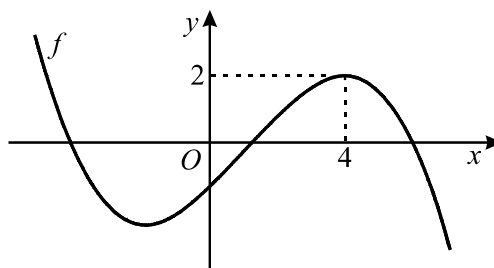
- (A) É contínua  
(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita  
(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda  
(D) É descontínua à esquerda e à direita

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $f$ , polinomial do terceiro grau.

$2$  é um máximo relativo da função  $f$ .

Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = f(x) - 2$

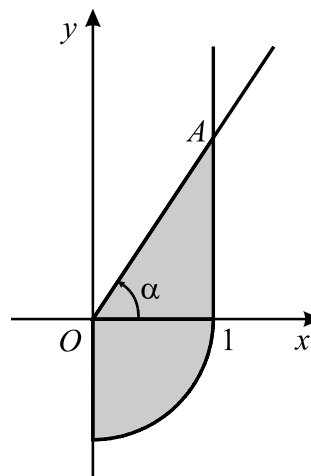
Quantos são os zeros da função  $g$ ?



- (A) um                      (B) dois                      (C) três                      (D) quatro

3. Na figura estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semi-recta paralela ao eixo  $Oy$ , com origem no ponto  $(1, 0)$
- um ponto  $A$  pertencente a esta semi-recta
- um ângulo de amplitude  $\alpha$ , cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semi-recta  $\hat{O}A$



Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de  $\alpha$  ?

(A)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\text{tg } \alpha}{2}$

(B)  $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\text{tg } \alpha}$

(C)  $\pi + \frac{\text{tg } \alpha}{2}$

(D)  $\pi + \frac{2}{\text{tg } \alpha}$

4. Considere as funções  $f$  e  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definidas por

$$f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad g(x) = 3^x$$

Qual é o conjunto solução da inequação  $f(x) > g(x)$  ?

- (A) Conjunto vazio    (B)  $\mathbb{R}^-$     (C)  $\mathbb{R}^+$     (D)  $\mathbb{R}$

5. Num curso superior existem dez disciplinas de índole literária, das quais três são de literatura contemporânea.

Um estudante pretende inscrever-se em seis disciplinas desse curso.

Quantas escolhas pode ele fazer se tiver de se inscrever em, pelo menos, duas disciplinas de literatura contemporânea?

(A)  ${}^3C_2 + {}^7C_4 \times {}^7C_3$

(B)  ${}^3C_2 + {}^7C_4 + {}^7C_3$

(C)  ${}^3C_2 \times {}^7C_4 \times {}^7C_3$

(D)  ${}^3C_2 \times {}^7C_4 + {}^7C_3$

6. Seja  $E$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset E$  e  $B \subset E$ ).

Tem-se que:

$$P(A \cap B) = 10\%$$

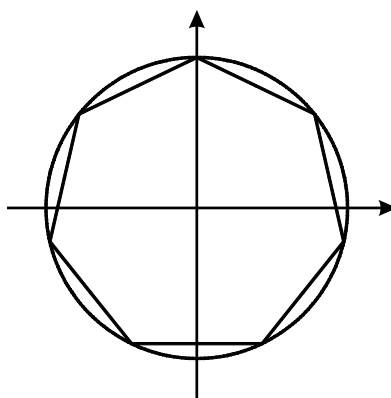
$$P(A) = 60\%$$

$$P(A \cup B) = 80\%$$

Qual é o valor da probabilidade condicionada  $P(A|B)$  ?

- (A)  $\frac{1}{5}$                       (B)  $\frac{1}{4}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{2}$

7. Na figura está representado, no plano complexo, um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.



Os vértices do heptágono são, para um certo número natural  $n$ , as imagens geométricas das raízes de índice  $n$  de um número complexo  $z$ .

Qual é o valor de  $z$  ?

- (A)  $1 + i$                       (B)  $1 - i$                       (C)  $i$                       (D)  $-i$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, seja

$$z_1 = 4i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

- 1.1. No plano complexo, a imagem geométrica de  $z_1$  é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

- 1.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a equação  $\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot z = 2 + z_1$   
Apresente o resultado na forma algébrica.

2. Considere que a altura  $A$  (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso  $p$  (em quilogramas), por

$$A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

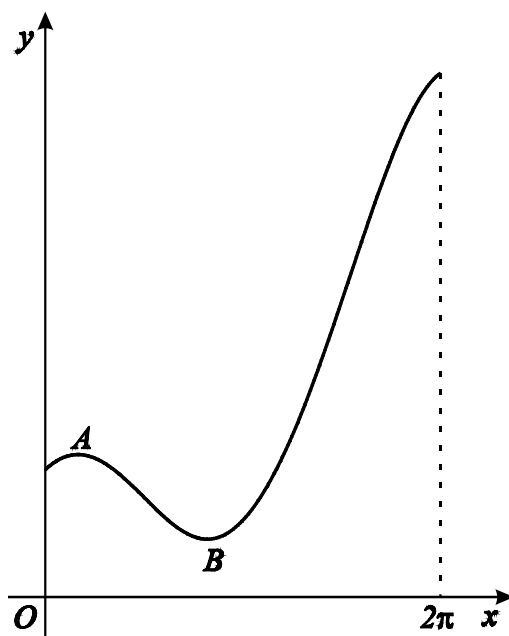
- 2.1. O Ricardo tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?

Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

- 2.2. Verifique que, para qualquer valor de  $p$ , a diferença  $A(2p) - A(p)$  é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

3. Na figura está representado o gráfico da função  $f$ , de domínio  $[0, 2\pi]$ , definida por  $f(x) = x + 2 \cos x$



$A$  e  $B$  são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de  $f$

- 3.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1.1. Mostre que a ordenada do ponto  $A$  é  $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$  e que a do ponto  $B$  é  $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

3.1.2. Qual é o contradomínio de  $f$ ?

- 3.2. Considere a recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $A$ .

Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto  $C$ .

Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto  $C$  (apresente o resultado arredondado às décimas).

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

4. De uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , sabe-se que a bissetriz dos quadrantes ímpares é uma assíntota do seu gráfico.

Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Prove que o eixo  $Ox$  é uma assíntota do gráfico de  $h$ .

5. Três casais, os Nunes, os Martins e os Santos, vão ao cinema.

- 5.1. Ficou decidido que uma mulher, escolhida ao acaso de entre as três mulheres, paga três bilhetes, e que um homem, escolhido igualmente ao acaso de entre os três homens, paga outros três bilhetes.

Qual é a probabilidade de o casal Nunes pagar os seis bilhetes? Apresente o resultado na forma de fracção.

- 5.2. Considere o seguinte problema:

*Depois de terem comprado os bilhetes, todos para a mesma fila e em lugares consecutivos, as seis pessoas distribuem-nos ao acaso entre si. Supondo que cada pessoa se senta no lugar correspondente ao bilhete que lhe saiu, qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos, com o casal Martins no meio?*

Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, explique por que razão  $\frac{2^4}{6!}$  é uma resposta correcta a este problema.

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

**FIM**



## COTAÇÕES

**Grupo I** ..... **63**

Cada resposta certa ..... +9  
Cada resposta errada..... - 3  
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Nota:**

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II** ..... **137**

**1.** ..... 21

**1.1.** ..... 10

**1.2.** ..... 11

**2.** ..... 28

**2.1.** ..... 14

**2.2.** ..... 14

**3.** ..... 41

**3.1.** ..... 28

**3.1.1.** ..... 14

**3.1.2.** ..... 14

**3.2.** ..... 13

**4.** ..... 15

**5.** ..... 32

**5.1.** ..... 14

**5.2.** ..... 18

**TOTAL** ..... **200**



## Formulário

### Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

### Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

### Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

### Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

### Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$